NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 09089918 2

Digitized by Google

Digitized by Google

Hennet
OMV

Digitized by Google

Astronomy-Collected essays 180
(2)

Johann Friedrich Hennert's

der Mathematik Professor's zu Utrecht

Mathematische

Abhandlungen

nebst einem

Verzeichnifs seiner sämmtlichen Schriften

herausgegeben

von

Carl Friedrich Hindenburg

der Naturlehre Professor zu Leipzig.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

Mit einer Kupfertafel.

Leipzig,
bey Gerhard Fleischer
1805.

Digitized by Google

Vorbericht.

Herr Professor Hennert zu Utrecht hat mir zu verschiedenen Zeiten, mehrere Jahre hindurch, sehr schätzbare Beyträge für das Leipziger Magazin zur Naturkunde und Mathematik, und das späterhin darauf gefolgte Archiv der reinen und angewandten Mathematik zugesendet. Seine erste Abhandlung, über die Bahn des von Herschel entdeckten neuen Planeten, steht im zweyten Bande des Magazins vom Jahre 1782; ihr sind mehrere nach einander gefolgt, und sie gehören sämmtlich zu den besten und vorzüglichsten der Sammlung.

Die Abhandlungen, die ich gegenwärtig dem Publikum vorlege, sind mir in eben der Absicht

Digitized by Google

von ihrem Verfasser mitgetheilt worden; sie trafen aber gerade zu einer solchen Zeit ein, wo, theils durch die Kriegsunruhen auf der einen Seite, theils durch die Sperrung alles literarischen Verkehrs, vornehmlich mit Rufsland, auf der andern Seite, der Absatz des Journals, wie er vor jenen Hindernissen war, beträchtlich erschwert und vermindert wurde. Die Erklärung der Verlagshandlung darüber auf dem blauen Umschlage zum eilften Hefte des Archivs (1800) liegt offen vor Augen, und hat den Erfolg gehabt, dafs seit der Zeit kein Heft davon weiter erschienen ist. Und so ward denn eine eigene, zum Gebrauch für die Mathematik besonders angelegte Zeitschrift, die Hennert und Kästner, v. Zach, Klügel und Pfleiderer, die Kramp und Rothe und Pfaff und Bürmann und Hauber mit ihren Beyträgen beehrten; die manche scharfsinnige Untersuchung aus Lamberts literarischen Nachlasse mittheilte; eine Zeitschrift, die zum Theil der Kenntnifs und Erweiterung der viel zu wenig gekannten combinatorischen Analysis gewidmet war, und mehrere Jahre hindurch mit Beyfall

der Kenner fortgedauert hatte, plötzlich und auf einmal in ihrem Laufe gehemmt und aufgehalten!

Unter diesen Umständen wurden die Hennertschen Abhandlungen mit andern zurückgelegt, nicht zurückgesendet, weil anfangs immer noch einige Hoffnung zu Fortsetzung des Archivs, bey günstigern Zeitumständen, übrig blieb. Jetzt aber, da alle Aussicht dazu verschwunden ist, habe ich einen andern Weg eingeschlagen, Herrn Professor Hennert für die Anstrengung einigermafsen zu entschädigen, die ihm die Ausarbeitung jener Aufsätze, bey seinen Jahren und seinen so sehr geschwächten Gesichte, gekostet haben mag. Sie erscheinen nehmlich, auf meinen Vorschlag, den Herr Hennert auch genehmigte, besonders abgedruckt; eine Auszeichnung, die sie wohl verdienen, theils ihres innern Gehalts halber, theils auch deswegen, weil sie vermuthlich die letzten Arbeiten seyn werden, die dieser würdige Veteran der Mathematik dem Publikum überliefert, der ein halbes Seculum hindurch, mit auszeichnendem Eifer und rastloser Thätigkeit den Wissenschaften nützliche Dienste geleistet hat.

Digitized by Google

Den Werth dieser kleinen Sammlung von Aufsätzen noch zu erhöhn, habe ich selbiger ein Verzeichniſs der zahlreichen Schriften ihres Verfassers, den ich darum ersucht hatte, beygefügt; die vollgültigsten Belege zu dem, was ich so eben gesagt habe. Auch bin ich so glücklich gewesen, einige nähere Nachrichten, das Leben dieses würdigen Mannes betreffend, zu erhalten; freylich nur einzelne Bruchstücke, die aber für diejenigen nicht ohne Werth seyn werden, die ihn aus seinen Schriften kennen und hochschätzen. Sie sind mir von Herrn Wagner aus Weiſsenfels mitgetheilt worden, der schon hier in Leipzig sich eifrig mit Mathematik beschäftigte, nachher aber bey seinem dreyjährigen Aufenhalte in Utrecht seine Kenntnisse, vornehmlich in Analysis und Astronomie, durch Herrn Professor Hennerts lehrreichen Unterricht und Umgang, noch mehr vervollkommnete und erweiterte. Ich will seine eigenen Worte hier anführen.

„*Johann Friedrich Hennert* ist im „Jahre 1733 zu Berlin geboren, und steht demnach

„jetzt in seinem 72sten Lebensjahre. Sein Vater „hatte ihn, glaub' ich, für die Jurisprudenz be„stimmt; allein die Vorliebe, welche er bereits in „seinen Jugendjahren für die mathematischen Wis„senschaften gefafst hatte, verleitete ihm die „Rechtswissenschaft und jede ernstliche Beschäf„tigung mit ihr. Um seine Lieblingsneigung zu „befriedigen ging er frühzeitig nach Paris, und „wohnte dort etwa zwey Jahre in dem Hause des „Geographen Delisle, dessen Verdienste um sich „er erkenntlich rühmt. Dort machte er auch „Lalande's Bekanntschaft, der ihm nachher im „Jahre 1771 in Utrecht besuchte.

„In seinem 24sten Jahre, also ungefähr um „1757, kam er nach Holland und ward zu „Utrecht, wenn ich mich recht errinnere, an „die Stelle des verstorbenen Castillon, Professor „der Mathematik und Astronomie, welchen Posten „er auch, eine Reihe von 47 Jahren hindurch, „rühmlichst vorgestanden hat. Das Utrechter „Observatorium fand er in schlechtem Zustande. „Ein paar alte Mauerquadranten und noch einiges „andere unbedeutende Geräth, machten den gan-

Digitized by Google

„zen Vorrath von Instrumenten aus. Professor „*Hennert* liefs in der Folge ein vierfüfsiges „achromatisches Fernrohr von London kommen, „stellte ein Passageinstrument auf, schaffte einen „beweglichen Quadranten von einem Fufs im Ra„dius an, und that seiner Seits alles mögliche, um „die Sternwarte nur einigermafsen brauchbar zu „machen. Sein Eifer für die Wissenschaft war, „und ist noch jetzt, unermüdet. Auch hat er das „Glück gehabt, verschiedne Schüler zu ziehen, „die ihm Ehre machen. Der vorzüglichste darun„ter ist wohl van Swinden, Professer der „Mathematik und Astronomie zu Amsterdam."

„Zweymal hatte Hennert Veranlassung in „sein Vaterland zurückzukehren, einmal nach „Berlin, das andremal nach Halle; allein Dankbar„keit für das Land, das ihn so gastfreundlich auf„genommen hatte, hielt ihn zurück. — Als im „Jahre 1787 die holländischen Unruhen ausbra„chen, wo alle Anhänger des Prinzen von Oranien „verfolgt wurden, floh *Hennert* nach Hanau, „wurde aber bald darauf, nach wiederhergestellter

Digitized by Google

„Ruhe, zurückberufen. Im Jahre 1802 verlor er „durch eine Entzündung das linke Auge; auch „nahm die Stärke des rechten seit dieser Zeit so „sehr ab, dafs er sich vor kurzem genöthiget sahe, „um seine Dimission zu bitten. Er erhielt sie. „Sein Nachfolger ist der zeitherige Professor der „Mathematik zu Leiden van Beek Calkoen, „der auch bereits rühmlichst bekannt, und, so „viel ich weis, *Hennerts* Schüler ist.“

„Bescheidenheit, Dienstfertigkeit, zuvor- „kommende Gefälligkeit, sind die Hauptzüge in „seinem Charakter. Er war immer heiter; nie „habe ich ihn mürrisch gesehen. Wer ihn kennt, „mufs ihn lieben. — Sein Geist ist in einer im- „merwährenden Thätigkeit, und er besitzt, wel- „ches zu bewundern ist, selbst jetzt, in einem so „hohen Alter, noch eine Lebhaftigkeit, welche „durchsehen läfst, wie viel mehr er noch, in „einen gröfsern, seinen Kräften angemessenern „Wirkungskreise, und ohne die traurigen Folgen „der unglücklichen Revolution zu erfahren, wel- „che alle Aufmerksamkeit von den Wissenschaften „mit Gewalt abzog, hätte nutzen können —“

Digitized by Google

So viel Herr *Wagner*, der sich noch dadurch um die kleine Schrift verdient gemacht, dafs er die Revision der einzelnen Bogen beym Druck übernommen hat, eine Gefälligkeit, der ähnlich, die Herr *Hennert* am Schlufs seiner 5ten Abhandlung von Herrn *Wagner* rühmt.

Leipzig, den 6. Jun. 1805.

Carl Friedrich Hindenburg.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniſs.

I. *Aus dem Orte des Aphelii und der Umlaufszeit eines Planeten die Excentricität zu finden.* Seite 1

II. *Ueber die Bewegung eines Körpers, welcher auf einer Stange, die um einen festen Punkt gedreht wird, in einem Ringe fortrückt.* 11

III. *Versuch einer Approximationsmethode.* 26

IV. *Versuch einer Summationsmethode.* 35

V. *Kurzer Entwurf einer Approximationsmethode, die Laufbahn eines Cometen oder neuen Planeten zu bestimmen.* 48

VI. *Versuch einer Theorie über die Bewegung des Wassers durch Oeffnungen der Gefäſse.* 60

Verzeichniſs der Schriften des Verfassers. 71

Digitized by Google

Weitere Verbesserungen und Druckfehler.

Seite VII. Zeile 5 statt verleitete lifs verleidete

— 4 — 15 statt $\left(0{,}75+\frac{e^3}{3}\right)$ lifs $\left(0{,}75+\frac{e^2}{8}\right)$

— 5 — 2 v. u. statt $\frac{3e^2}{a}$ lifs $\frac{3e^2}{4}$

— 26 — 4 statt $-\frac{a}{n}$ lifs $-\frac{a}{m}$

— 27 — 13 v. u. statt $2y^3$ lifs y^3

— 31 — 5 statt $x = 4{,}6118$ lifs $x - 4{,}6118 = o$

— 32 — 6 statt $q - 2$ lifs $y - 2$

— 32 — 13 lifs $y = 3{,}077 - 0{,}209 = 2{,}868$
und $x = 0{,}868 = y - 2$

— 33 — 10 statt $x = -4{,}6224$ lifs $x = +4{,}6224$

— 36 — 18 statt $\Delta^2 A = (-2b+a)$ lifs $\Delta^2 A = c-2b+a$

— 36 — 19 statt $f-2e-3c+2b-a$ lifs $e-3c+3b-a$

— 38 — 7 statt $\frac{mSxdS}{dx}$ lifs $\frac{mxdS}{dx}$

— 38 — 11 statt f lifs f

— 42 — 15 u. 16 mufs $+(m+2)\,F\,x^{m+1}\,dS$ aus Zeile 16 in Zeile 15 vor $2 =$ etc. gesetzt werden.

— 45 — 1 v. u. statt $fz\,dx$ lifs $fz\,dx$

— 49 — 8 statt SPQ lifs PQ

NB. Zu dem Verzeichnifs der Schriften des Verfassers ist noch unter No. 67. der Titel der gegenwärtigen Abhandlungen zu setzen.

Digitized by Google

I.

Aus dem Orte des Aphelii und der Umlaufszeit eines Planeten die Excentricität zu finden.

In der angewandten Mathematik sind verschiedene Methoden, eine Aufgabe aufzulösen, vielleicht nützlicher als in der Analysis. Geben verschiedene Auflösungen nicht die nämlichen Resultate, so kann man die Art der Beobachtungen, auf welche dieselben gegründet sind, untersuchen, um daraus zu erfahren, entweder ob die eine genauer als die andere könne gemacht werden; oder ob die eine mehr Einfluſs als die andere auf das Resultat habe. In den Ephemeriden des Jahrs 1804 habe ich gezeigt, wie die Excentricität aus der gröſsten aequatio centri gefunden wird; in dieser Abhandlung werde ich aus dem Orte des Aphelii die Excentricität abzuleiten suchen.

§. 1. Für eine gegebene Zeit wird die mittlere Anomalie $= M$ aus dem gegebenen Ort des Apheliums gefunden; weil die mittlere Anomalie von der Excentricität unabhängig ist. Aus dem heliocentrischen Orte des Planeten, welcher durch die Opposition oder Conjunction bestimmt worden, ist ebenfalls die wahre Anomalie $= V$ bekannt.

Digitized by Google

Die Excentricitär ist $= e$. Die bekannte Equation zwischen den Anomalien ist $M - V = 2\,e \sin. V + \left[\frac{3\,e^2}{4} + \frac{e^4}{8}\right] \sin. 2\,V + \frac{e^3}{3} \sin. 3\,V + \frac{3\,e^4}{8} \sin. 4\,V +$ etc.

Ist die Excentricität nicht schon ungefähr bekannt, so wird dieselbe mit Weglassung der Potenzen von e die folgende, nämlich $e = (M - V) : 2 \sin. V$.

§. 2. In der nämlichen Absicht, und zwar zu Prüfung der astronomischen Tafeln, werde ich, wie in der letzten Abhandlung, die Anomalien aus den Tafeln des Mars gebrauchen. Für den 31. Januar 1800 war die mittlere Anomalie $M = 3^s\ 6°\ 24'\ 35''$, und die wahre $V = 2^s\ 25°\ 43'\ 57''$, also $M - V = 10°\ 40'\ 38'' = 0{,}1863526$, in Theilen des Radius $= 1$.

$$\log. \frac{M - V}{2} = 8{,}9693061$$
$$\log. \sin. V = 9{,}9987942$$
$$\log. e = 8{,}9705119.$$

§. 3. Die Excentricität kann nun näher bestimmt werden, wenn der gefundene Werth für e in den Potenzen von e gesetzt wird, denn alsdann wird die Equation für

$$e = (M - V - \left[\frac{3\,e^2}{4} + \frac{e^4}{8}\right] \sin. 2\,V - \frac{e^3}{3} \sin. 3\,V - \tfrac{3}{8}\,e^4 \sin. 4\,V) : 2 \sin. V.$$

Nun ist

$$2\,V = 5^s\ 21°\ 27'\ 54''$$
$$3\,V = 8^s\ 17°\ 11'\ 51''$$
$$4\,V = 11^s\ 12°\ 55'\ 48''$$

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
\text{l. } e^2 &= 7{,}9410238 \\
\text{l. } \tfrac{1}{8} &= -0{,}9030900 \\
\text{l. } \tfrac{e^2}{8} &= 7{,}0379338 \quad \text{und } \tfrac{e^2}{8} = 0{,}0010912 \\
\hline
&\ 9{,}8756927 = \text{l.}\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{e^2}{8}\right) \\
&\ 9{,}1724733 = \text{l. sin. } 2\,V \\
&\ 7{,}9410238 = \text{l. } e^2 \\
\hline
&\ 6{,}9891898 \\
\text{l. } e^3 &= 6{,}9115357 \\
\text{l. } \tfrac{1}{3} &= -0{,}4771212 \\
\hline
&\ 6{,}4344145 \\
&\ -9{,}9890668 = \text{l. sin. } 3\,V \\
\hline
&\ -6{,}4234813 = \text{l. } \tfrac{e^3}{3} \text{ sin. } 3\,V \\
\hline
&\ 5{,}4560813 = \text{l. } \tfrac{3e^4}{8} \\
&\ -9{,}4676556 = \text{l. sin. } 4\,V \\
\hline
&\ -4{,}9237369 = \text{l. } \tfrac{3e^4}{8} \text{ sin. } 4\,V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{also } e^2\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{e^2}{8}\right) \text{sin. } 2\,V &= 0{,}0009731 \\
\tfrac{e^3}{3} \text{ sin. } 3\,V &= -0{,}0002651 \\
\tfrac{3e^4}{8} \text{ sin. } 4\,V &= -0{,}0000084 \\
\hline
&\ +0{,}0006996 \\
M - V &= 0{,}1863526 \\
\hline
&\ 0{,}1856530 \\
\text{dessen log.} &= 9{,}2687023 \\
\text{log. } 2 \text{ sin. } V &= 0{,}2998242 \\
\hline
\text{log. } e &= 8{,}9688781
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Die zuerst gefundene Excentricität sollte eigentlich gröfser und diese letztere etwas kleiner als die wahre seyn. Man mufs also sehn, wie viel diese von jener abweicht.

§. 4. Zu dem Ende werde ich mit der gefundenen Excentricität oder $\log e = 8{,}9688781$ die Aequatio centri für eine andre Zeit berechnen, nämlich für den 1. August, wo die mittlere Anomalie $m = 6^s\ 11^\circ\ 46'\ 54''$, und die wahre $u = 6^s\ 14^\circ\ 14'\ 14''$, also $M - u = -2^\circ\ 27'\ 20'' = 0{,}0428575$ in Theilen des Radius. Man wird das zweyte Glied der Equation $m - u = 2\,e \sin. u + e^2 \left(0{,}75 + \frac{e^2}{8}\right) \sin. 2u + \frac{e^3}{3} \sin. 3u + \frac{3e^4}{8} \sin. 4u$, (§. 1.) berechnen, und finden

$$2\,e \sin. u = -0{,}0457849$$
$$e^2 \left(0{,}75 + \frac{e^2}{8}\right) \sin. 2u = +0{,}0031025$$
$$\frac{e^3}{3} \sin. 3u = -0{,}0001827$$
$$\frac{3e^4}{8} \sin. 4u = +0{,}0000236$$
$$\text{Zweytes Glied} = -0{,}0428415$$
$$M - u = -0{,}0428575$$
$$\text{der Fehler} = +0{,}0000160.$$

§. 5. Der gefundene Fehler, weil er sehr klein ist, kann zu Verbesserung der Excentricität dadurch angewendet werden, dafs man ihn als ein Differenzial des ersten Gliedes der Equation ansieht. Denn wenn man das zweyte ebenfalls differenziirt, und der gemeldete Fehler $= dp$ gesetzt wird, so bekommt man die Verbesserung der Excentricität oder $de = dp$ getheilt durch

Digitized by Google

$$2 \sin. u + \frac{e}{2}(3+e^2) \sin. 2u + e^2 \sin. 3u + \tfrac{1}{2} e^3 \sin. 4u.$$

Die Rechnung läfst sich leicht aus dem vorhergehenden ableiten

$$\begin{aligned}
2 \sin. u &= -\ 0{,}4918742 \\
\tfrac{5}{2}(3+e^2) \sin. 2u &= +\ 0{,}0667558 \\
e^2 \sin. 3u &= -\ 0{,}0058753 \\
\tfrac{1}{2} e^3 \sin. 4u &= +\ 0{,}0010154 \\
\text{Divisor} &= -\ 0{,}4299803 \\
dp &= -\ 0{,}0000160 \\
\text{l. } dp &= \ \ 5{,}2041200 \\
\text{l. Divis.} &= \ \ 9{,}6334486 \\
\text{l. } de &= \ \ 5{,}5706714 \\
de &= +\ 0{,}0000377 \\
e &= \ \ 0{,}0930846 \\
\text{corr. } e &= \ \ 0{,}0931223 \\
\text{Nach La Lande ist } e &= \ \ 0{,}0930877 \\
\text{Fehler} &= +\ 0{,}0000346.
\end{aligned}$$

§. 6. Noch eine andre analytische Methode, die Excentricität aus dem Aphelio zu finden, werde ich der Beurtheilung der Astronomen übergeben, denen ich überlasse zu entscheiden, welche von ihnen die genauere sey. Diese Methode kann zwar auf analytische Aufgaben nicht angewendet werden, indessen scheint sie mir doch weit bequemer für physikalische und astronomische Gegenstände zu seyn, als die bisher bekannten zu Findung der Wurzeln einer Equation. Die obige Series oder Equation $q = 2e \sin. V + \frac{3e^2}{a} \sin. 2V + \frac{e^3}{3} \sin. 3V + \left\{\frac{\sin. 2V + 3 \sin. 4V}{8}\right\} e^4$, wenn die aequa-

tio centri $M - V = q$ gestellt wird, ist von der vierten Gröfse. Wenn nun die Potenzen von e, nämlich e, e^2, e^3, e^4 als vier unbekannte Gröfsen x, y, u, z, behandelt werden, so können vermittelst vier heliometrischer Längen, die auch vier Equationen geben, diese vier unbekannten Gröfsen zufolge der bekannten Methoden gefunden werden. Erhält man vier gleiche Werthe für e aus den Potenzen e^2, e^3, e^4, so ist keine Correction nöthig, aufserdem mufs ein Mittel aus den verschiedenen Werthen des e für den wahren Werth gebraucht werden. Diese Methode scheint mühsam zu seyn; doch die Astronomen sind seit 40 Jahren an lange Rechnungen gewöhnt. Dafs aber diese Methode vier oder fünf Beobachtungen erfordert, ist kein Nachtheil, obschon es mit der analytischen Eleganz nicht zu stimmen scheint. Ist es nicht eleganter aus zwey oder drey Beobachtungen die Laufbahn eines Planeten oder Cometen zu bestimmen? Ja wohl, aber ist es auch genauer und gründlicher? Aus kleinen Bogen können die Analysten allerley krumme Linien machen. Eine Hypothese wird um so wahrscheinlicher, wenn sie mit mehreren Beobachtungen übereinstimmt.

§. 7. Sollte die Länge der Rechnung den Astronomen abschrecken, so könnte die Arbeit etwas erleichtert werden. Nachdem die Excentricität e, wie in §. 1., ohngefähr gefunden ist $= E$, so setzt man für e, in $e^2 \times e$ oder $e^3 = e^2 E$, und für $e^4 = e^2 \times e^2 = e^2 E^2$. Auf diese Weise wird die Equation des vierten Grads auf eine des zweyten gebracht, und man bedarf nur zweyer Beobachtungen. In der ersten derselben sey

Digitized by Google

die aequatio centri $M - V = Q$, in der zweyten sey $m - v = q$, folglich bekommt man diese zwey Equationen $Q = 2e \sin. V + (\frac{3}{4} \sin. 2V + \frac{E}{3} \sin. 3V + \frac{1}{8}(\sin. 2V + 3 \sin. 4V) E^2)\, e^2$. Der Coefficient von e^2 in der ersten Beobachtung sey $= A$, in der zweyten $= a$, so bekommt man diese zwey Equationen $Q = 2\, e \sin. V + A e^2$ (I.), und $q = 2\, e \sin. u + a\, e^2$ (II.).

Wird die I. Equation mit sin. u, die II. mit sin. V multipliciert, so erhält man

$$e^2 = \frac{M - V - (m - u) \sin. V : \sin. u}{A - a \sin. V : \sin. u} \quad \text{III.}$$

Aus der ersten und zweyten Equation wird endlich gefunden $e = (Q - A e^2) : 2 \sin. V$.

§. 8. In der ersten Beobachtung war $V = 85° 43' 37''$ und $M - V = Q = 0{,}1863526$ (§. 2.). In der zweyten Beobachtung war $m - v = q = - 0{,}0428575$, und $u = 194° 14' 14''$ (§. 4.). Man nehme nun l. $e = 8{,}9705119$ zufolge des §. 2., so wird man finden

$$\begin{aligned}
\tfrac{3}{4} \sin. 2V &= + 0{,}1112887 \\
\tfrac{E}{3} \sin. 3V &= - 0{,}0303709 \\
\tfrac{E^2}{8}(\sin. 2V + \ldots) &= - 0{,}0007991 \\
A &= + 0{,}0801187 \\
\tfrac{3}{4} \sin. 2u &= \quad 0{,}3575653 \\
\tfrac{E}{3} \sin. 3u &= - 0{,}0211260 \\
\tfrac{E^2}{8}(\sin. 2u + \ldots) &= \quad 0{,}0032642 \\
a &= + 0{,}3397035
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Nachdem die Gröfsen A und a gefunden sind, so kann die Excentricität e unmittelbar durch eine Equation bestimmt werden, es ist nämlich

$$e = \frac{Q - q\,A : a}{2\,(\sin. V - \frac{A}{a} \sin. u)}$$

l. A =	8,9037339
l. a =	9,5311000
l. $\frac{A}{a}$ =	9,3726339
l. q =	−8,6320268
l. $\frac{qA}{a}$ =	−8,0046607
$\frac{qA}{a}$ =	+0,0101034
Q =	0,1863526
numerat. =	0,1964560
$\frac{\text{numer.}}{2}$ =	0,0982280
l. $\frac{A}{a}$ =	9,3726339
l. sin. u =	−9,3908241
l. $\frac{A \sin. u}{a}$ =	−8,7634580
$-\frac{A \sin. u}{a}$ =	+0,0580040
sin. V =	0,9972276
denomin. =	1,0552316
log. $\frac{\text{numer.}}{2}$ =	8,9922353
log. denom. =	0,0233477
l. e =	8,9688876

Die Rechnung kann wiederholt werden, wenn für e oder E der gefundene genauere Werth in den Formeln für A uud a substituirt wird: Oder man wird aus dem

Digitized by Google

gefundenen e die aequatio centri für eine dritte Beobachtung, oder auch für eine der bereits gegebenen suchen, und dann die Verbesserung der Excentricität, vermittelst der Differenzialeqnation §. 5. entwickeln.

§. 9. Man würde mir vielleicht den Einwurf machen, warum nicht die Excentricität aus der aequatio centri durch die reversio serierum könnte gefnnden werden, ohne andere Methoden zu gebrauchen? Allein die reversio serierum ist analytisch und in abstracto allezeit brauchbar, aber nicht immer in der Anwendung, sie führt oft auf series divergentes, oder solche, die langsam fortgehen, wozu die Reihe, aus der gröfsten aequatio centri die Excentricität zu finden *), auch ein Beyspiel lieferte.

In der That wenn man aus der Series $Q = 2e\sin. V + \frac{1}{4}e^2 \sin. 2V + \frac{e^3}{3}\sin. 3V +$ etc. die Gröfse e durch Q bestimmt, so bekommt man

$$e = \frac{Q}{2\sin. V} - \frac{3\sin. 2V}{2^5 \sin. V^3} Q^2 + \left\{ \frac{3^2 \sin. 2V^2}{2^8 \sin. V^5} - \frac{\sin. 3V}{3 \cdot 2^4 \sin. V^4} \right\} Q^3 + \text{etc.}$$

Die folgenden Termini nehmen langsam ab und sind sehr verwickelt. Ist überdem sin. V der sinus eines kleinern Bogens, und Q ein nicht kleiner Bogen, so ist diese Series ganz unbrauchbar. Einen Nutzen könnte man zuweilen aus dieser Reihe erhalten, wenn

*) Siehe Astronomisches Jahrbuch von 1804.

Digitized by Google

$$e = \frac{Q}{2 \sin. V} - \frac{3 \sin. 2V}{2^5 \sin. V^3} Q^2 = \frac{Q}{2 \sin. V}\left[1 - \frac{3 \cot. V}{8} \times Q\right]$$

$$= \frac{Q}{2 \sin. V}(1 - 0{,}375 \cot. V \times Q),$$ für den approximirten Werth in den zwey vorher aufgestellten Methoden genommen wird. Es sey $Q = -0{,}0428575$ und $V = 194° 14' 14''$ in der zweyten Beobachung. Die Rechnung ist kurz

log. cot. $V =$	10,3956297
l. 0,375 =	9,5740313
l. $Q = -$	8,6320268
l. 0,375 cot. $V \times Q = -$	8,8016878
$- 0{,}375 \cot. V \times Q =$	0,0633443
$(1 - 0{,}375 \cot. V \times Q)^{\frac{1}{2}} =$	0,5316721
dessen logar. =	9,7256439
log. $Q = -$	8,6320268
	$-$ 8,3576707
log. sin. $V = -$	9,3908241
l. $e =$	8,9668466

Der Werth für e ist zu klein, weil der Divisor sin. V ein kleiner Bruch ist, und daher der zweyte Terminus zu grofs wird, obschon Q ziemlich klein ist.

Nimmt man die erste Beobachtung, wo $V = 85°$ 43′ 57″, also viel gröfser ist als vorher, wogegen aber auch $Q = 0{,}1863526$ ebenfalls zugenommen hat, so bekommt man ein genaueres Resultat, nämlich l. $e = 9{,}9682474$. Wäre Q etwas kleiner gewesen, so würde das Resultat der Wahrheit näher kommen. Es erhellet also, dafs der Gebrauch der Reversion der Reihen sehr eingeschränkt ist. Es war also nicht vergebliche Mühe, bequemere Methoden zur Auflösung der vorgestellten Aufgabe zu suchen.

Digitized by Google

II.

Ueber die Bewegung eines Körpers, welcher auf einer Stange, die um einen festen Punkt gedrehet wird, in einem Ringe fortrückt.

Es ist nicht ungewöhnlich, dafs auch die gröfsten Mathematiker dieselbe Aufgabe nach verschiedenen Methoden aufgelöst haben: durch solche Bemühungen hat die Analysis Erweiterungen gewonnen. Nie aber hat ein Mathematiker behauptet, dafs der von ihm eingeschlagene Weg der einzige wahre und gute wäre. Alle Methoden waren überzeugend. Ganz anders hingegen verfahren die Metaphysiker, leider! insonderheit in unsern Tagen; nur sie allein bilden sich ein, das Daseyn Gottes, oder die Unsterblichkeit der Seele bewiesen zu haben! und doch ist es merkwürdig, dafs man diese Wahrheiten schon lange vor ihnen erkannt hat! Sollte man nicht fast glauben, dafs diese Wahrheiten keines Beweises bedürften? Die Metaphysik lehrt doch nichts neues, nur neue Methoden, Terminologieen. Aber Methoden sind subjectif; dem Engeländer gefällt die Synthese, dem Franzosen die Analyse. Möchten unsre heiligen Väter, Newton, Euler, für die Mathesis bitten, dafs diese himmlische Wissenschaft nicht durch die heutige Metaphysik entheiligt werde, sie hat den Bonsens schon genug besudelt.

Aufgabe. Fig. I.

§. 1. An der Ruthe oder Stange *CB* ist die Masse *B* bey *B* fest gemacht, eine andere

Masse *A* kann vermittelst eines Ringes längst der Stange gleiten. Die Stange wird mit einer gewissen Kraft horizontal um die verticale Axe, die durch *C* geht, bewegt. Man will die Umstände der Bewegung des Körpers *A* und der Stange *CB* bestimmen?

D'Alembert in dem Traité de Dynamique (Seite 74) und lange darnach Bossut in dem 3ten Theil der Mémoires présentés à l'Academie des Sciences de Paris, an. 1760 (Seite 496) haben aus demselben Grundsatz diese Aufgabe aufgelöst, nämlich aus der Gleichheit der Momente der verlornen und gewonnenen Bewegung (équation entre le moment du mouvement perdu et le moment du mouvement acquis, Seite 474). Bossut's Analyse ist kürzer als die von D'Alembert. Auch macht la Grange in der Mécanique analytique (Seite 180) die gegründete Anmerkung, dafs die Anwendung des D'Alembertschen Grundsatzes Schwierigkeiten verursache, um die Kräfte, welche sich aufheben, und ihr Gleichgewicht zu bestimmen. Diesen Vorwurf befestigen die weitläuftigen Auflösungen der dynamischen Aufgaben. Ich habe mich bemüht, die vorgestellte Aufgabe aus den ersten, nicht zu bezweifelnden, Grundsätzen der Mechanik, welche alle Mathematiker annehmen, abzuleiten.

§. 2. In der Bewegung der Stange mit dem glitschenden Körper *A* lassen sich dreyerley Bewegungen unterscheiden.

Digitized by Google

1) Das Glitschen des Körpers A längst der Stange, nach den Grundsätzen der Vis centrifuga.

2) Die Bewegung der Stange um dem festen Punkt C, oder um eine perpendiculäre Axe, zufolge der Grundsätze der Rotation.

3) Weil der Körper A seinen Ort im absoluten Raume alle Augenblicke verändert, so kann man sich eine krumme Linie vorstellen, die derselbe bis zum Ende der Stange im absoluten Raume beschreibt, nach den Grundsätzen der progressiven Bewegung.

§. 3. Es sey die Länge der Stange $CB = b$, der Abstand des Körpers A im Anfange der Bewegung, oder $CA = a$. Die Stange hat in der Zeit t den Winkel $DCB = \varphi$ beschrieben, und der Körper A ist bis M auf der Stange fortgerückt, dessen Abstand von C oder $CM = r$. Wenn c die Geschwindigkeit der Masse A bezeichnet, so ist derselben vis centrifuga $= Ac^2 : 2gr$, wo $g = 15{,}1$ pariser Fufs. Mit der Geschwinkeit c würde die Masse den kleinen Cirkelbogen $Mn = rd\varphi$, wäre er an der Stange unbeweglich geblieben, in der Zeit dt beschrieben haben; folglich dessen Geschwindheit $c = rd\varphi : dt$, und die vis centrifuga $= Ar^2 d\varphi^2 : 2grdt^2 = Ard\varphi^2 : dt^2 2g$. Also wäre die vis acceleratrix, mit welcher die Masse fortrückt, $= Ard\varphi^2 : 2Agdt^2 = rd\varphi^2 : 2gdt^2$. Nach dem bekannten mechanischen Grundsatz bekommt man diese Equation, $\frac{2grd\varphi^2}{2gdt^2} = \frac{ddr}{dt^2}$, oder $rd\varphi^2 = ddr$, I.

Wäre es erlaubt, die umdrehende Bewegung gleichförmig anzunehmen, so dafs $d\varphi$ eine beständige Gröfse vorstellte, so könnte diese Equation integrirt werden, wenn man sie zuvor mit $2dr$ multiplicierte. Man erhielt also $r^2 d\varphi^2 = dr^2 + Cd\varphi^2$, weil $d\varphi$ eine beständige Gröfse ist. Also auch $\frac{r^2 d\varphi^2}{dt^2} = \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{Cd\varphi^2}{dt^2}$.

Nun ist $dr : dt$ die Geschwindheit der Masse A auf der Stange, welche aber null ist im Anfange der Bewegung, wo $r = a$, wodurch die Constante $C = a^2$ bestimmt wird. Man bekommt daher $r^2 d\varphi^2 = dr^2 + a^2 d\varphi^2$, oder $d\varphi = \frac{dr}{\sqrt{(r^2 - a^2)}} = \frac{dz}{b}$, wenn z den Bogen BD bezeichnet.

Durch die Integration wird gefunden φ oder $\frac{z}{b} = \log. (r + \sqrt{r^2 - a^2}) + C$. Aber wenn $r = a$, so ist z oder $\varphi = 0$, folglich ist das complete Integral φ oder $\frac{z}{b} = \log. \left[\frac{r + \sqrt{(r^2 - a^2)}}{a}\right]$.

Wenn $r = CF = b$ wird, so findet man den Winkel FDB, wo die Bewegung der Masse A auf der Stange aufhört, nämlich $\varphi = \log. hyp. \left[\frac{b + \sqrt{(b^2 - a^2)}}{a}\right]$. Ist $b = 20$ und $a = 4$ Schuh, so wird $\varphi = \log. hyp. 9{,}9 = 2{,}292534 = 131° 27'$.

Bezeichnet e die Basis der hyperbolischen Logarithmen, so wird $e^{z:b} = \frac{r + \sqrt{(r^2 - a^2)}}{a}$, also

Digitized by Google

$r = \frac{a}{2}(e^{z:b} + e^{-z:b})$; diese Equation bestimmt die krumme Linie, welche der Körper A im absoluten Raume zu beschreiben scheint. Für den Bogen 57° 17′, der dem Radius gleich ist, oder für $z = b$ ist der Abstand $r = \frac{a}{2}\left\{e + \frac{1}{e}\right\} = \frac{a}{2} \times 3{,}087 = \frac{3a}{2}$; (weil $e = 2{,}71828$). Ist also die Stange nicht länger als $\frac{3}{2}$ des anfänglichen Abstandes des Körpers A, so mufs die Bewegung des letztern auf der Stange aufhören, bevor die Stange den Winkel 57° 17′ durchlaufen hat.

§. 4. Da in den gefundenen Equationen weder die Massen A und B, noch die Kraft P, welche die Stange in Bewegung setzt, in Betracht kommen, so könnte man auch, um den ganzen Mechanismus zu bestimmen, die zwey letztern Umstände der Bewegung zugleich mit in Erwägung ziehen (§. 2). Wenn daher P die Kraft bezeichnet, welche perpendiculär der Stange die Bewegung bey B giebt, so ist das Moment $= Pb$. Das Moment der Trägheit des Körpers B wäre Bb^2, oder auch Mk^2, wenn es, nach Eulers Ausdruck, das Moment der Stange und der Masse B anweist. Folglich nach den Gesetzen der umdrehenden Bewegung wird diese Equation statt finden, $\frac{2gPb}{Bb^2} = \frac{dd\varphi}{dt^2}$. II.

§. 5. Endlich der dritte Umstand des gegenwärtigen Mechanismus, nämlich die Bewegung der Masse A längst der krummen Linie AMF, giebt diese Equation, $\frac{2gPbd\varphi}{Ads} = -\frac{dds}{dt^2}$. Die Potenz P verändert sich

Digitized by Google

bey M in $Pb : r$, welche den Bogen $Mn = r d\varphi$ in der Zeit dt erzeugt. Aus diesem Bogen Mn und aus $Mv = dr$ wird das Element der krummen Linie $Mm = ds$ als Diagonallinie geboren. Es ist auch $ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr$. Aber die Kraft $Pb : r$ wirkt perpendicular auf die Stange bey M, diese mufs also in die normale und tangentielle Kraft aufgelöst werden; und folglich wird sie $= \frac{Pb}{r} \times \frac{Mn}{Mm} = \frac{Pd\varphi}{ds}$.

Nun ist die Bewegung auf der Stange eine retardirende, weil die Geschwindheit der Masse A bey F verschwindet, daher bekommt man diese Equation

$$\frac{2gPbd\varphi}{Ads} = -\frac{dds}{dt^2}. \quad \text{III.}$$

§. 6. Substituirt man $Pb = \frac{Bb^2 dd\varphi}{2gdt^2}$, aus der Equation II., in die Equation III. §. 5., so erhält man die Equation $\frac{2gBb^2 d\varphi dd\varphi}{2Agdsdt^2} = -\frac{dds}{dt^2}$, also $Bb^2 d\varphi dd\varphi = -Adsdds$, oder $Bb^2 d\varphi dd\varphi + Ads\, dds = 0$. (IV.), das Integral ist $Bb^2 d\varphi^2 + Ads^2 = Cdt^2$, weil dt eine beständige Gröfse ist. Folglich ist $\frac{Bb^2 d\varphi^2}{dt^2} + \frac{Ads^2}{dt^2} = C$. Nun ist $bd\varphi : dt$ die Geschwindigkeit längst des Bogens BF bey m, und $ds : dt$ die des Körpers A. Es sey $ds : dt = u$, und $bd\varphi : dt = v$, so ist $Av^2 + Bu^2 = c$. Ist die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers $B = f$, so wird die des Körpers $A = af : b$, folglich $Bv^2 + Bu^2 = Aa^2 f^2 : b^2 + Bf^2$. Dieser Equation entspricht die sogenannte Erhaltung der lebendigen Kräfte.

Digitized by Google

Ich will nur anmerken, dafs die Geschwindigkeit v des Körpers A bey F verschwindet, dafs aber beide, A und B, alsdann nur eine Masse machen, folglich wird $u = \frac{\sqrt{(Aa^2f^2 + Bf^2b^2)}}{b} =$ der Rotationsgeschwindigkeit, mit welcher die kreisförmige Bewegung gleichförmig fortgeht.

§. 7. Um die übrigen Umstände der Bewegung, nämlich die Winkel φ und die Abstände r, in einer gegebenen Zeit t zu bestimmen, mufs aus der (§. 6.) gefundenen Equation $Ads\,ddr + Bb^2\,d\varphi\,dd\varphi = 0$ das Element der krummen Linie ds weggeschaft werden, weil der Weg des Körpers A in mechanischer Rücksicht nicht statt findet. Nun ist $ds^2 = r^2\,d\varphi^2 + dr^2$ (§. 5.), also $ds\,ddr = rdr\,d\varphi^2 + r^2\,d\varphi\,dd\varphi + dr\,ddr$; ferner giebt die Equation I. (§. 3.) $ddr = rd\varphi^2$, folglich $ds\,ddr = 2rdr\,d\varphi^2 + r^2\,d\varphi\,dd\varphi$, woraus denn ferner folgt, dafs $Ads\,ddr + Bb^2\,d\varphi\,dd\varphi = (2rdr\,d\varphi^2 + r^2\,d\varphi\,dd\varphi)A + Bb^2\,d\varphi\,dd\varphi = 0$, oder $Ad.r^2\,d\varphi + Bb^2\,dd\varphi = 0$; das Integral ist $Ar^2\,d\varphi + Bb^2\,d\varphi = C\,dt$, oder $Ar.\frac{rd\varphi}{dt} + Bb.\frac{b\,d\varphi}{dt} = C$. Im Anfange der Bewegung war $bd\varphi : dt = f$, und $rd\varphi : dt = af : b$, wenn $r = a$ war; woraus folgt $C = Aa^2f : b + Bbf$. Hierdurch bekommt man die Equation $\frac{Ar^2\,d\varphi}{dt} + \frac{Bb^2\,d\varphi}{dt} = \frac{f}{b}(Aa^2 + Bb^2)$. Man setze das zweyte Glied $= D$, so bekommt man $\frac{b\,d\varphi}{dt} = \frac{bD}{Ar^2 + Bb^2} = u$: die Geschwindigkeit im Kreisbogen BF (§. 6.) aus dem Werth u giebt

zu erkennen, dafs die umdrehende Geschwindigkeit nicht, so wie §. 3. gethan, als beständig kann angenommen werden.

§. 8. Um eine Equation zwischen r und t, und φ und r zu finden, mufs man vermittelst der Equationen $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{D}{Ar^2+Bb^2}$ und $d\varphi^2 = \frac{ddr}{r}$ (§. 3.) I. das $d\varphi$ wegschaffen. Man wird daraus ableiten $\frac{ddr}{dt^2} = \frac{D^2\,dt^2}{(Ar^2+Bb^2)^2}$ oder mit $2dr$ multipliciert, giebt $\frac{2drddr}{dt^2} = \frac{2D^2rdr}{(Ar^2+Bb^2)^2}$. Durch die Integration bekommt man $\frac{dr^2}{dt^2} = -\frac{D^2}{Ar^2+Bb^2} + C$. Im Anfang der Bewegung ist die Geschwindigkeit $dr:dt = 0$, wenn $r = a$, also $C = \frac{D^2}{Aa^2+Bb^2}$, folglich

$$\frac{dr^2}{dt^2} = D^2\left\{\frac{1}{Aa^2+Bb^2} - \frac{1}{Ar^2+Bb^2}\right\}, \text{ endlich}$$

$$dr = Ddt\sqrt{\frac{A(r^2-a^2)}{(Aa^2+Bb^2)(Ar^2+Bb^2)}}$$

$$= \frac{fdt}{b}\sqrt{\frac{A(Aa^2+Bb^2)(r^2-a^2)}{Ar^2+Bb^2}} = Edt\sqrt{\frac{r^2-a^2}{r^2+Bb^2:A}},$$

und auch $dt = \frac{dr}{E}\sqrt{\frac{r^2+Bb^2:A}{r^2-a^2}}$. V.

Wird der Werth von dt in der Equation des vorhergehenden §. substituirt, so kommt

$$d\varphi = \frac{D}{AE}\,dr\sqrt{1:(r^2+Bb^2:A)(r^2-a^2)}. \text{ VI.}$$

§. 9. Die Integration der Equationen V. und VI. hängt von der Rectification der Hyperbel ab. Die

Bemühungen der gröfsten Mathematiker, ähnliche Equationen durch die Rectification der Ellipse und Hyperbel zu integriren, sind mir nicht unbekannt. So viel ich weis, ist d'Alembert der erste, welcher diese analytischen Untersuchungen in den Mémoires de l'Academie de Berlin vom Jahre 1748 — 49 allgemeiner gemacht hat. Euler hat im 8ten Theil der Novi Coment. Petrop. (Seite 129) besonders die V. Equation auf die Ellipse reduciert. Auch Lacroix hat diese Materie im zweyten Theil des Traité du Calcul differentiel etc. abgehandelt. Ich bewundre die feinen analytischen Kunstgriffe der grofsen Mathematiker; ich mufs aber, vielleicht zu meiner Schande, gestehen, dafs ich in der Anwendung keinen Gebrauch davon habe machen können. Dasselbe Bewandnifs hat es vielleicht mit den meisten Integrationen durch Quadratur und Rectification. Sie sind analytisch und synthetisch, schön und sinnreich, aber nicht so nützlich beym Gebrauche.

§. 10. Nach einigen Versuchen, die mir divergirende Series gaben, habe ich folgender Methode den Vorzug gegeben. Der Kürze wegen nenne ich

$B b^2 : A = \alpha^2$, also $dt = \frac{\alpha\, dr}{E} \sqrt{\frac{1 + r^2 : \alpha^2}{r^2 - a^2}}$ (§. 8 V.).

Es ist $\sqrt{(1 + r^2 : \alpha^2)} = 1 + \frac{r^2}{2\alpha^2} - \frac{r^4}{8\alpha^4} + \ldots$; folglich

$$dt = \frac{\alpha\, dr}{E} \sqrt{\frac{1 + r^2 : \alpha^2}{r^2 - a^2}} = \frac{\alpha}{E} \left[\frac{dr}{\sqrt{(r^2 - a^2)}} + \frac{r^2\, dr}{2\alpha^2 \sqrt{(r^2 - a^2)}} - \frac{r^4\, dr}{8\alpha^4 \sqrt{(r^2 - a^2)}} - \ldots \right].$$

Es ist bekannt, dafs $\int \frac{r^2\,dr}{\sqrt{(r^2-a^2)}} = \frac{r}{2}\sqrt{(r^2-a^2)} + \frac{a^2}{2}\log.(r+\sqrt{(r^2-a^2)}$, und $\int \frac{r^4\,dr}{\sqrt{(r^2-a^2)}} = \frac{r^2}{4}\sqrt{(r^2-a^2)} + \frac{3}{8}a^2 r\sqrt{(r^2-a^2)} + \frac{3}{8}a^4 \text{l.}(r+\sqrt{(r^2-a^2)}$, folglich

$$t = \frac{\alpha}{E}\left(\log.(r+\sqrt{(r^2-a^2)})\left[1+\frac{a^2}{2\cdot 2\alpha^2}-\frac{3a^4}{8\cdot 8\alpha^4}\right]\right.$$
$$\left. + r\sqrt{(r^2-a^2)}\left[\frac{1}{4\alpha^2}-\frac{r^2}{4\cdot 8\alpha^4}-\frac{3a^2}{8\cdot 8\alpha^4}-..\right]\right) + C$$

Wenn $r = a$, wird $t = 0$, also

$$C = \frac{\alpha}{E}\log.a\left[1+\frac{a^2}{4\alpha^2}-\frac{3a^4}{8\cdot 8\alpha^4}\right], \text{ folglich}$$

$$t = \frac{\alpha}{E}\left[\frac{\log.r+\sqrt{(r^2-a^2)}}{a}\left(1+\frac{a^2}{4\alpha^2}-\frac{3a^4}{8\cdot 8\alpha^4}\right)\right]$$
$$+ r\sqrt{(r^2-a^2)}\left[\frac{1}{4\alpha^2}-\frac{r^2}{4\cdot 8\alpha^4}-\frac{3a^2}{8\cdot 8\alpha^4}-..\right].$$

Endlich die ganze Zeit, wenn die Masse A die Stange durchgelaufen hat, wird gefunden wenn man $b = r$ setzt, also

$$T'' = \frac{\alpha}{E}\left(\frac{\log.b+\sqrt{(b^2-a^2)}}{a}\left[1+\frac{a^2}{4\alpha^2}-\frac{3a^4}{8\cdot 8\alpha^4}+..\right]\right.$$
$$\left. + b\sqrt{(b^2-a^2)}\left[\frac{1}{4\alpha^2}-\frac{b^2}{4\cdot 8\alpha^4}-\frac{3a^2}{8\cdot 8\alpha^4}-..\right]\right).$$

Es sey $b = 20$, $a = 4$ Schuh, $A = 30$ und $B = 9$ Pfund, so ist $\alpha^2 = Bb^2 : A = 120$, und $\alpha = 11$, ferner

$E = \frac{f}{b}\sqrt{(Aa^2+Bb^2)} = \frac{2}{20} \times 64 = 6{,}4$, (wenn die Geschwindigkeit $f = 2$ Schuh in einer Sekunde ist), folglich $T'' = 1{,}72\,(2{,}2925\,(1+\frac{1}{30}-\frac{1}{1200}) + 392\,(\frac{1}{480}-\frac{1}{11520}-\frac{1}{19200})) = 6'', 66$.

Digitized by Google

§. 11. Die Equation VI. nämlich

$$d\phi = \frac{D\,dr}{AE}\sqrt{1:(r^2+a^2)(r^2-a^2)} = \frac{D\,dr}{AE\alpha}\,\frac{\left(1+\frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(r^2-a^2)}}$$

kann auch auf die Rectification reduciert werden. Ich werde zur Integration den Weg des vorhergehenden §. verfolgen. Weil $\left(1+\frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{r^2}{2\alpha^2} + \frac{3r^4}{8\alpha^4} -$ etc. ist, so bekommt man

$$\varphi = \frac{D}{AE\alpha}\left(\log.(r+\sqrt{(r^2-a^2)})\left[1-\frac{a^2}{4\alpha^2}+\frac{9a^4}{8\cdot 8\alpha^4}\right]\right.$$
$$\left. - r\sqrt{r^2-a^2}\left[\frac{1}{4\alpha^2}-\frac{3r^2}{8\cdot 4\alpha^4}-\frac{9a^2}{8\cdot 8\alpha^4}-..\right]\right)+C.$$

Die Constante C wird bestimmt, wenn $\varphi = 0$: wird $r = a$ und wieder $r = b$ gesetzt, so erhält man den ganzen Winkel φ, den die Stange von B bis F beschrieben hat, also

$$\varphi = \frac{D}{AE\alpha}\left(\frac{\log.b+\sqrt{(b^2-a^2)}}{a}\left[1-\frac{a^2}{4\alpha^2}+\frac{9a^4}{8\cdot 8\alpha^4}\right]\right.$$
$$\left. - b\sqrt{(b^2-a^2)}\left[\frac{1}{4\alpha^2}-\frac{3b^2}{8\cdot 4\alpha^4}-\frac{9a^2}{8\cdot 8\alpha^4}-..\right]\right).$$

Nach dem Beyspiel des §. 10. ist $D = \frac{f}{b}(Aa^2+Bb^2) = 408$, $E = 6{,}4$, $A = 30$ und $\alpha = 11$ u. s. f., also
$\varphi = 0{,}193\ (2{,}2925\ (1 - \frac{1}{30} + \frac{1}{400}) - 392\ (\frac{1}{480} - \frac{1}{386} - \frac{1}{64400}) = 0{,}5230 = 30°$ zum nächsten.

§. 12. In ähnlichen Fällen, da die Integration nicht genau kann gefunden werden, ist vielleicht noch ein Mittel, für die Differenziale kleine Gröfsen allmählich anzunehmen, bis die Summe, die gesucht wird, erschöpft ist. Man setze in der Equation V. für dr z. B.

Digitized by Google

1 Schuh, so dafs man die Zeit dt sucht, nach welcher der Körper A um einen Schuh fortgerückt ist. Zufolge des gegebenen Beyspiels wurde $r = a + 1 = 5$, und

$$\frac{a\,dr}{E}\sqrt{\frac{1 + r^2 : a^2}{r^2 - a^2}} = dt = \frac{11 \times 1}{6{,}4} . 0{,}36 = 0{,}62''.$$

Wollte man die Zeit, in welcher die Masse A um 2 Schuh fortgerückt ist, genauer wissen, so müfste bey der Rechnung der anfängliche Abstand a des Körpers A nicht $= 4$, sondern $= 5$ gesetzt werden, weil die Bewegung der Masse A um einen Schuh bereits fortgegangen war. Der Werth des E wird verändert und zwar $E = \frac{2}{10}\sqrt{750 + 3600} = 6{,}6$, folglich

$dt = \frac{11.1}{6{,}6}\sqrt{\frac{1 + 0{,}3}{11}} = 0'',56$. Es ist nun $r = 6$. Der Körper A ist um zwey Schuh fortgerückt in $0{,}62 + 0{,}56 = 1{,}18$ Secunden. Man sieht, dafs diese Rechnungsart sehr langsam fortgeht.

§. 13. Die Reibung verursacht in der Auflösung dynamischer Aufgaben oft viele Schwierigkeiten. Ich habe es gewagt, die vorgestellte Aufgabe mit Rücksicht auf die Reibung aufzulösen. Wenn man mir folgende Hypothese will zugeben, so wird die Auflösung erleichtert. Die Reibung äufsert nur den Einfluss auf die Bewegung der Masse A längst der Stange, also widersteht sie der Vis centrifuga. Diese aber war $= A r d\varphi^2 : 2g\,dt^2$. Die Vis acceleratrix wird durch die Reibung $= mA$ vermindert, so dafs gleichsam ein gröfserer Körper, nämlich $A + nA$, müfste fortgestofsen werden; also könnte die Vis centrifuga mit $A(1 + n) = mA$ getheilt werden; folglich würde die

Vis acceleratrix $= Ard\varphi^2 \cdot 2gmAdt^2$ seyn; und zufolge §. 3. bekäme man die Equation $\frac{rd\varphi^2}{m} = ddr$; daher wird (§. 7.) $dsdds = rdrd\varphi^2 + r^2 d\varphi ddφ + drddr$ $= rdrd\varphi^2 + rd\varphi ddφ + \frac{rdrd\varphi^2}{m}$, ferner wird die Equation $Adsdds + Bb^2 d\varphi ddφ = 0$ in diese verändert, $Adr\left[rd\varphi + \frac{rd\varphi}{m}\right] = -(Ar^2 + Bb^2)\, ddφ$ und $\frac{Ardr}{Ar^2 + Bb^2} = -\frac{ddφ}{\left(1+\frac{1}{m}\right)d\varphi} = -\frac{dd\varphi}{p\,d\varphi}$, wenn $1 + \frac{1}{m} = p$ gesetzt wird. Die Integration giebt $\frac{\log.(Ar^2+Bb^2)}{2} = -\frac{\log.\frac{d\varphi}{Cdt}}{p}$ oder $\frac{p}{2}\log.(Ar^2+Bb^2)$ $= \log.\frac{Cdt}{d\varphi}$; also $(Ar^2+Bb^2)^{\frac{p}{2}} = \frac{Cdt}{d\varphi}$, oder $d\varphi = \frac{Cdt}{(Ar^2+Bb^2)^{\frac{p}{2}}}$, oder $\frac{bp\varphi}{dt} = \frac{Cb}{(Ar^2+Bb^2)^{\frac{p}{2}}}$.

Im Anfange der Bewegung war $\frac{bd\varphi}{dt} = f$, also die Constante C oder $D = \frac{f}{b}(Aa^2+Bb^2)^{\frac{p}{2}}$, und $\frac{bd\varphi}{dt}$ $= f\left\{\frac{(Aa^2+Bb^2)}{Ar^2+Bb^2)}\right\}^{\frac{p}{2}}$. Schreibt man nun $\frac{mddr}{r}$ für $d\varphi^2$, so bekommt man (§. 8.) die Equation $\frac{mddr}{r}$ $= \frac{f^2}{b^2}\left\{\frac{Aa^2+Bb^2}{Ar^2+Bb^2}\right\}^p dt^2$ und $\frac{ddr}{dt^2} = \frac{f^2 r}{b^2 m}\left\{\frac{Aa^2+Bb^2}{Ar^2+Bb^2}\right\}^p$.

Digitized by Google

Diese Equation kann integrirt werden, wenn sie zuvor mit $2\,dr$ multipliciert wird; das Integral wird seyn

$\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{f^2\,(A\alpha^2 + Bb^2)^p}{b^2\,m\,(1-p)\,A\,(Ar^2+Bb^2)^{p-1}} + C$. Im Anfange der Bewegung ist $\frac{dr}{dt} = 0$ und $r = a$, hieraus folgt

$C = -\frac{f^2}{b^2\,m\,(1-p)\,A}\,(A\alpha^2+Bb^2)$, folglich $\frac{dr^2}{dt^2}$

$= \frac{f^2}{b^2\,m\,(1-p)\,A}\left\{\frac{(A\alpha^2+Bb^2)^p - (A\alpha^2+Bb^2)}{(Ar^2+Bb^2)^{p-1}}\right\}$;

endlich $dr = \frac{f\,dt}{b}\sqrt{\frac{F^p - F}{(Ar^2+Bb^2)^{p-1}}} \times \frac{1}{m\,(r-p)\,A}$

wenn $F = A\alpha^2 + Bb^2$ gesetzt wird. Ohne Rücksicht auf die Reibung ist $n = 0$ und $1 + n = m = 1$, und

$p = 1 + \frac{1}{m} = 2$, also

$dr = \frac{f\,dt}{b}\sqrt{\left((A\alpha^2+Bb^2)\left[\frac{A\alpha^2+Bb^2}{Ar^2+Bb^2} \div 1\right]\right)} \times -\frac{1}{A}$

$= \frac{f\,dt}{b}\sqrt{(A\alpha^2+Bb^2)\left[\frac{r^2-\alpha^2}{Ar^2+Bb^2}\right]}$, oder

$dt = \frac{b}{f}\,dr\sqrt{\frac{Ar^2+Bb^2}{(A\alpha^2+Bb^2)\,(r^2-\alpha^2)}}$ wie vorher gefunden worden ist.

Wäre die Reibung $= \frac{A}{3}$ oder $n = \frac{1}{3}$, also $m = \frac{4}{3}$ und $p = 1 + \frac{1}{m} = \frac{7}{4}$, so müfste die Equation dt

$= \frac{b}{f}\,dr\sqrt{\frac{(Ar^2+Bb^2)^{3:4}}{-F^2 + F\,(Ar^2+Bb^2)^{3:4}}}$ integrirt werden.

Digitized by Google

Man setze $(Ar^2 + Bb^2)^{3:4} = z$, so wird

$$dr = \frac{\frac{2}{3} z^{\frac{1}{3}} dz}{\sqrt{(z^{4:3} - Bb^2)A}}, \text{ und}$$

$$dt = \frac{b}{f} \frac{dz \,.\, z^{5:6} (z^{4:3} - Bb^2)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{A}}{\sqrt{(Fz - F^{7:4})}}.$$

Die Integration ist verwickelt. Den kürzsten Weg dazu würde die Entwickelung von

$\frac{(z - F^{\frac{3}{4}})^{-\frac{1}{2}}}{F} (z^{\frac{4}{3}} - Bb^2)^{-\frac{1}{2}}$ anweisen. Ich will mich nicht länger hier verweilen; genug dafs ich gewiesen habe, wie die Reibung auch in dynamische Aufgaben kann gebracht werden. Es ist merkwürdig, dafs eine dem Scheine nach so einfache Bewegung, als die gegenwärtige, so viele analytische Schwierigkeiten verursacht.

Digitized by Google

III.

Versuch einer Approximationsmethode.

§. 1.

Könnten die Equationen $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots \ldots n = 0$ auf die Form des Binomiums $(y+1)^m$ gebracht werden, so würde die Auflösung auch die Näherungsmethoden erleichtern. Wenn man für $x = y - \frac{a}{n} + 1$ setzt, so bekommt man eine Equation, in welcher die ersten Termini $y^m + my^{m-1}$ sind. Die übrigen Termini des Binomiums können aus der gegebenen Equation durch Addition gewisser Gröfsen hergeleitet werden. Es würde unnöthiges Rechnen seyn, ja für den Gebrauch unbequem, wenn ich diesen Versuch in allgemeinen analytischen Zeichen vorstellte. Man wird den Gang der Methode aus der Anflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen völlig ersehen.

§. 2. Es sey die cubische Equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Man setze $x = y - \frac{p}{3} + 1$, und der Kürze wegen $1 - \frac{p}{3} = b$, so wird $x = y + b$, wodurch die obige Equation in folgende transformirt wird

$$\left.\begin{matrix} y^3 + 3b \\ + p \end{matrix}\right\} y^2 \quad \left.\begin{matrix} + \; 3b^2 \\ + 2pb \\ + \; q \end{matrix}\right\} y \quad \begin{matrix} + \; b^3 = 0. \\ + pb^2 \\ + qb \\ + r \end{matrix}$$

Substituirt man in dem zweyten und dritten Gliede

$p = 3 - 3b$, so verändert sich die transformirte Equation in die folgende

$$y^3 + 3y^2 + (3b(2-b)+q)y + b^3 + pb^2 + qb + r = 0. \text{ (I.)}$$

Es sey $3b(2-b) + q = f$, und der letzte Terminus $= g$, so wird die Equation I. in die Equation II. verändert, $y^3 + 3y^2 + fy + g = 0$.

Um die gegebene Equation zu transformiren wird der 2te Terminus allezeit $3y^2$, der 3te Terminus wird leicht gemacht, wenn man das 3fache b oder $3\left(1 - \frac{p}{3}\right)$ mit $2 - b$ multipliciert, zum Producte aber den Coefficienten des dritten Terminus oder q addirt. Der letzte Terminus, wie bekannt ist, wird aus der gegebenen Equation abgeleitet, wenn man b für x schreibt.

§. 3. Um die Equation II. auf die Form $(y+1)^3 = 2y^3 + 3y^2 + 3y + 1$ zu bringen, mufs man $(3-f)y + 1 - g$ zu derselben addiren, folglich bekommt man $y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = (3-f)y + 1 - g$. (III.), oder $\overline{y+1}^3 = (3-f)y + 1 - g$ (III.).

§. 4. Man setze, dafs y beynahe gefunden wäre, so dafs nur ein Bruch zu dem y müfste addirt werden; dieser Bruch sey $= z$, und $y + 1 = a$, also eine bekannte Zahl, so wird anstatt $y + 1$ geschrieben werden $a + z$ und $a - 1 + z$ für y, folglich bekommt man für die Equation III. (§. 3.) die folgende

$$(a+z)^3 = (3-f)(a-1+z) + 1 - g. \text{ IV.}$$

Verwirft man die höheren Potenzen von z, so erhält man die Equation IV. $z = \frac{a^3 - (3-f)(a-1) - 1 + g}{3 - f - 3a^2}$.

Digitized by Google

§. 5. Durch Versuche wird a gefunden

1) Verschwindet der Zähler, so wird $z = 0$; also hat man die rationale Wnrzel a gefunden, so auch $y = a - 1$ und $x = a - \frac{p}{3}$. Ein solcher Werth wird, wie bekannt ist, durch die Auflösung des letzten Terminus, oder $g - 1$, in seine Factoren gefunden.

2) Man mufs für a solche Zahlen gebrauchen, welche für z einen Bruch geben.

3) Um die Versuche zu vermindern, kann man erst $a = 0$ oder $= 1$ oder $= -1$ setzen, man wird aus den Resultaten für z leicht absehen, welche Zahlen in der Substitution von a eine gebrochene Zahl für z geben können.

§. 6. Die Formel für z ist nur in dem Fall unbrauchbar, wenn $3 - f = 3a^2$, oder $a^2 = 1 - \frac{f}{3}$, dann würde $z = \infty$. Aber dieser Fall ist nur selten, weil $f = 1$ oder $= 2$ seyn müfste, und dann dürfte die zweyte Potenz des z nicht verworfen werden.

Erstes Beyspiel.

§. 7. Die Equation $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ ist gegeben, also $p = 3$, $q = -4$, $r = -12$ (§. 2.), und $b = 1 - \frac{p}{3} = 0$, folglich ist der Coefficient $f = 3b(2 - b) + q = -4$ (§. 2.). Der letzte Terminus $b^3 + b^2 p + cb + r = -12 = g$. Weil der Coefficient des zweyten Terminus $= 3$ ist, so war die

Digitized by Google

Transformation nicht nöthig, und daher wurde

$q = -4 = f$ und $r = -12 = g$, foglich wird

$$z = \frac{a^3 - 7(a-1) - 13}{7 - 3a^2} \text{ (§. 4.)} = \frac{a^3 - 7a - 6}{7 - 3a^2}.$$

Für $a = 0$ wird $z = -\frac{6}{7}$, aber $a = y + 1$, also $y = -1$ und $x = y - \frac{p}{3} + 1 - \frac{6}{7} = -1\frac{6}{7}$, welches sich der Wurzel $= -2$ nähert.

Setzt man $a = 1$, so wird $z = -\frac{6}{4}$, diese Zahl ist gröfser als die Einheit, und kann demnach nicht gebraucht werden. Aber $a = -1$ giebt $z = 0$, folglich $y + 1 = -1$ und $y = -2$, endlich

$$x = -2 - 1 + 1 = -2.$$

Für $a = 2$ wird $z = +\frac{12}{5}$, woraus erhellet, dafs positive Zahlen für a nicht angenommen werden können, aber noch $a = 3$ giebt $z = 0$ und $x = 2$. Für $a = -2$ wird $z = 0$, folglich $y = -3$ und $x = -3$. Also die drey Wurzeln -2, $+3$, $+2$.

Zweytes Beyspiel.

$x^3 + 7x + 9 = 0$. Weil der zweyte Terminus in dieser Equation fehlt, so ist $b = 1$ und $p = 0$, also $f = 3b(2-b) + q = 3 + 7 = 10$ und $g = 17$, die transformirte Equation wird $y^3 + 3y^2 + 10y + 17 = 0$

abgezogen $\quad 7y + 16$

so bekommt man $y + 1^3 = -7y + 16$,

also $z = \frac{a^3 + (a-1)7 + 16}{-7 - 3a^2} = \frac{a^3 + 7a + 9}{-7 - 3a^2}$.

Für $a = 0$ oder $= 1$ und für alle positive Zahlen bekommt man für z gröfsere Werthe als die Einheit. Aber

Digitized by Google

$a = -1$ giebt $z = -\frac{1}{10} = -0{,}1$, also $y = a - 1 = -2$ und $x = -2 + 1 + z = -1{,}1$. Begehrt man einen genauern Werth für x, so mufs die Rechnung wiederholt werden, wenn $-1{,}1$ für a genommen wird; also

$$z = -\frac{1{,}331 - 7{,}7 + 9}{-7 - 3{,}3} = \frac{-0{,}031}{-10{,}3} = +0{,}0032.$$

Also $a = -1{,}0967$ und $y = -2{,}0967$, endlich $x = -2{,}0967 + 1 = -1{,}0967$. Alle übrige negativen Zahlen für a geben z gröfser als die Einheit; folglich hat diese Equation nur eine reelle und zwey imaginäre Wurzeln, wie bekannt ist. — Die Rechnung nach der cardanischen Formel wird sehr beschwerlich, wenn man nur die Wurzeln auf vier Decimalbrüche bestimmen wollte.

Drittes Beyspiel.

§. 8. $x^3 - 5x^2 + 7x - 24 = 0$. Also wird $x = y + \frac{5}{3} + 1 = y + \frac{8}{3}$ und $b = \frac{8}{3}$, folglich der Coefficient $f = -\frac{16}{3} + 7 = +\frac{5}{3}$ und $y = -\frac{592}{27}$. Also wird

$$z = \frac{a^3 - (a-1)\frac{4}{3} - \frac{619}{27}}{\frac{4}{3} - 3a^2} = \frac{a^3 - \frac{4}{3}a - 21\frac{16}{27}}{\frac{4}{3} - 3a^2}.$$

Nur $a = 3$ giebt ein Resultat für $z = -0{,}0548$, also $y = 2$ und $x = 2 + \frac{8}{3} - 0{,}0548 = 4{,}6118$. — Auch für $a = 4$ wird $z = -0{,}799$, also ist $x = 3 + 2\frac{2}{3} - 0{,}798 = 4{,}866$. Man sieht, dafs diese letzte keine neue Wurzel ist, die von der ersten unterschieden wäre; die zwey übrigen Wurzeln sind imaginär, weil für z nichts als Werthe, die gröfser als die Einheit sind, gefunden werden, welche Zahlen man auch für a annehmen mag. Sucht man eine nähere Wurzel anstatt der letztgefundenen, und setzt $a = 4 - 0{,}799 = 3{,}201$,

Digitized by Google

so bekommt man

$$z = \frac{32{,}7987 - 4{,}268 - 21{,}592}{1{,}25 - 30{,}739} = -0{,}239;$$

also $a = 3{,}201 - 0{,}239 = 2{,}962$ und $y = 1{,}962$, endlich $x = 1{,}962 + 2{,}666 = 4{,}628$, welches nicht viel von der ersten Wurzel $x = 4{,}6118$ abweicht; diese Wurzel ist genau, weil, wenn man die gegebene Equation mit $x = 4{,}6118$ dividiert, nur 0,048 übrig bleibt. Uebrigens hat die durch diese Equation abgeleitete Quadratgleichung $x^2 - 0{,}389\,x + 5{,}194 = 0$ zwey imaginäre Wurzeln.

§. 9. Ein Beyspiel wird genug seyn, die Anwendung dieser Methode auf die Equationen des vierten Grades zu erläutern. Die allgemeine Gleichung $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ wird auf die Form $\overline{y+1}^4 = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1$ gebracht, wenn $x = y - \frac{p}{4} + 1 = y + b$ angenommen wird, wo $b = 1 - \frac{p}{4}$ bezeichnet. Substituirt man $4 - b$ für $\frac{p}{4}$ in den Coefficienten des dritten und vierten Terminus, so bekommt man die transformirte Equation $y^4 + 4y^3 + (6b(2-b)+q)y^2 + (4b^2(3-2b)+2qb+r)y + b^4 + pb^3 + qb^2 + rb + 1$. Man setze $6b(2-b) + q = f$ und $4b^2(3-2b) + 2qb + r = g$ und $b^4 + pb^3 + qb^2 + rb + 1 = h$ so wird die transformirte Equation $y^4 + 4y^3 + fy^2 + gy + h = 0$

addirt $(6-f)y^2 + (4-g)y + 1 - h$

bekommt man $(y+1)^4 = (6-f)y^2 + (4-g)y + 1 - h$.

Digitized by Google

Nimmt man $y + 1 = a$ und addirt man die gebrochene Zahl z mit Weglassung ihrer Potenzen, so wird man finden $z = \frac{a^4 - (6-f)(a-1)^2 - (4-g)(a-1) + h - 1}{-4a^3 + 2(6-f)(a-1) + 4 - g}$.

§. 10. Die Equation
$x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 10x - 16 = 0$ ist gegeben, also $-\frac{p}{4} = -3$, folglich $x = y - 3 + 1 = q - 2$, also $b = -2$; ferner $f = -54$, $g = 146$, $h = -140$. Also $z = \frac{a^4 - 60(a-1)^2 + 141(a-1) + 139}{-4a^4 + 120(a-1) - 141}$. Für $a = 4$, erhält man für z eine gebrochene Zahl, nämlich $z = 0{,}077$ und $x = 1{,}077$.

Begehrt man einen näheren Werth für die Wurzel und nimmt also $a = 4{,}077$, so bekommt man $z = -0{,}209$ und $a = 31{,}077 - 0{,}209 = 3{,}868$, endlich $x = 0{,}848$.

§. 11. Das vorzügliche einer Approximationsmethode besteht nicht sowohl in deren analytischer Eleganz, als in der Verkürzung der verdrüfslichen Rechnungen, welche diese Methoden erfordern. Die Newtonische Methode verdient in dieser Absicht den Vorzug für vielen andern, (Newton lib. de resolutione Aequationum, pag. 10. Tom. I. operum Newton. ex Editione Castilion.). Ich werde hier die Equation $x^3 - 5x^2 + 7x - 24 = 0$ (§. 8.) nach Newton auflösen. Man sucht zuerst zwey Zahlen für x aus der Reihe der natürlichen Zahlen, welche positive und negative Summen der Equation geben: für

Digitized by Google

$x = 4$ ist die Summe $= -12$, für $x = 5$ ist dieselbe $= +11$, also ist 4 die nächste Zahl. Nun setze man $x = 4 + y$, und es wird $-12 + 15y + 7y^2 + y^3 = 0$, folglich $y = \frac{12}{15} = 0{,}8$.

Unsre Methode giebt immediat durch die erste Operation $x = 4{,}6118$, welches von der genauern Wurzel nicht so viel abweicht. — Ferner setze man $y = 0{,}8 + u$, und man erhält die Equation $4{,}992 + 28{,}12\,u + 9{,}4\,u^2 + u^3 = 0$, also $u = -0{,}1775$ und $x = -4{,}6224$.

Nach unserer Methode wird die Rechnung mit derselben Formul von z fortgesetzt; der Nenner $\frac{4a}{3} - 3a^3$ bleibt gewöhnlich unveränderlich. Aber die Newtonische erfordert bey jeder Approximation eine neue Transformation, also eine andere Rechnungsweise. Man setzt nämlich $a = \sqrt[3]{5} - 0{,}0548 = 2{,}9452$, also $a^3 = \overline{2{,}945 + 0{,}0002}^3 = 25{,}542058625 + \overline{2{,}943}^2 \times 0{,}0006 = 25{,}547262440$; also $z = -\frac{0{,}0282}{22{,}0921} = -0{,}0012$, also $x = 4{,}6105$, welches wenig von dem erstgefundenen $x = 4{,}6118$ verschieden ist.

§. 12. Newton hat am angeführten Orte seine Methode auf ein leichtes Beyspiel, nämlich auf die cubische Equation $x^3 - 2x - 5 = 0$, wo der zweyte Terminus fehlt, angewendet. Diese Gleichungen aber lassen sich durch unsre Methode leicht berechnen, weil der Zähler in der Formul von z die gegebene Equation selbst ist, wenn a anstatt x geschrieben wird. Weil in

Digitized by Google

diesem Falle $b = 1$ ist, mithin $f = 3 + q$, folglich $3 - f = -q$ und $g - 1 = r$ (§. 2.) so wird $z = \frac{a^3 - 2a - 5}{2 - 3a^2}$ (§. 3.). Ist $a = 2$, so wird $z = 0{,}1$, also $x = 2{,}1$; denselben Werth für x giebt auch die erste Newtonische Approximation u. s. w.

§. 13. Die Approximationsmethode vermittelst der Fractions Continues, welche de La Grange (la Resolution des équations numériques Seite 40) gefunden hat, ist elegant, aber in der Anwendung nicht so leicht, als die Newtonische. Man schreibt $a + \frac{1}{z}$, anstatt $a + z$, dann erhielte man für z den obigen Werth, nur in umgekehrter Form, nämlich $z = \frac{3 - f - 3a^2}{a^3 - (3 - f)(a - 1) - 1 + g}$. Wollte man weiter gehn und $a + \frac{1}{z + \frac{1}{u}}$ schreiben, so müfste man eine neue Equation für u transformiren. Aber zufolge unsrer Vorschrift gebraucht man für alle z dieselbe Formul. Rechnet man mit Decimalbrüchen, so läfst sich leicht ersehen, ob man sich der Wurzel nähert, wenn der Zähler des z ein kleiner Bruch wird. Das läfst sich nicht so leicht mit den Fractions Continues thun, oder sie müfsten bey jeder Näherung auf Decimalbrüche gebracht werden; sie nehmen oft langsam ab, denn es ist bekannt, dafs der eine dieser Brüche bald gröfser, bald kleiner als ein vorhergehender wird. Die Form dieser Brüche ist eleganter als die der Decimalbrüche, ob sie aber branchbarer sey, das bezweifle ich.

Digitized by Google

IV.

Versuch einer Summationsmethode.

Die Integrationen führen oft auf Series, die nicht können summirt werden. Die Erweiterung der Analyse scheint deswegen von den Summationen abzuhängen. Die Analysten können nicht genug auf die Series und deren Summationen ihre Bemühungen anwenden. Unter den Methoden, die zu diesem Endzweck gebraucht werden können, will ich jetzt nur auf diejenigen sehen, wo eine Series aus der andern abgeleitet wird. Ich finde nicht nöthig, mich der Derivationsmethode, welche man seit einiger Zeit gebraucht, und die man wohl für ganz neu ausgiebt, zu bedienen. Die wahre ursprüngliche Derivationsmethode liefert das Theorema binomiale und die damit verknüpfte Taylorsche Series. Kästner hat die einfachste und natürlichste Entwickelung dieser so nützlichen Series gegeben, weil er dieselbe aus dem Theorema binomiale abgeleitet hat. Das ungekünstelte, das natürliche ist wahre analytische Schönheit, und diese Schönheit ist der Bernoullischen und Eulerschen Analysis ganz eigen; man wird nicht durch eine Menge Zeichen, die ein Zauberbuch verrathen, geblendet und verwirrt. Es ist möglich, dafs eine Methode sinnreicher als die andere sey; allein können vermittelst solcher gekünstelten Methoden auch solche Wahrheiten nur entdeckt werden, durch die andern aber nicht? Ueberhaupt sind Methoden etwas Subjectives: dem einen gefällt dieser, dem andern ein

Digitized by Google

andrer Weg. Auch die Gewohnheit thut viel dazu. Die in der Schule eines Eulers erzogen sind, werden sich nicht so leicht an eine gekünstelte Analyse gewöhnen. Doch alles hat seine Mode, auch die Analysis, ja auch selbst die Mechanik.

§. 1. Walmesley (Memoires de l'Academie de Berlin) und besonders Euler (Institutiones Calculi differentialis) haben die Taylorsche Formul gebraucht, aus der bekannten Summe einer Series die Summe einer andern abzuleiten. Wenn $S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ etc. eine bekannte Summe ist, deren Termini mit den Zahlen a, b, c, e, f etc. multipliciert, die Series $Aa + Bbx + Ccx$ $Dex + Efx$ ausmachen, so wird die Summe dieser Series oder $Z = SA + \frac{xdS}{dx} \cdot \Delta A + \frac{x^2 ddS}{2dx^2} \cdot \Delta^2 A$ $+ \frac{x^3 d^3 S}{2.3dx^3} \cdot \Delta^3 A +$ etc. seyn, wenn ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$ die ersten, zweyten, dritten Differenzen der Factoren a, b, c, e, nämlich $\Delta A = b - a$, und $\Delta^2 A = (-2b + a)$, und $\Delta^3 = f - 2e - 3c + 2b - a$ etc. bezeichnen.

§. 2. Man nimmt gewöhnlich die Summe S als bekannt an, um aus derselben die Summe Z abzuleiten: allein könnte nicht dieses Problem umgekehrt aufgelöst werden? Aus der gegebenen Summe Z die Summe S zu deriviren. Ich erinnere mich nicht, dafs diese Aufgabe zur Summation der Series wäre gebraucht worden.

Digitized by Google

Meine Absicht ist in dieser Abhandlung, vermittelst dieses Problems die Summation einiger Series zu beweisen, die, so viel ich weifs, noch nicht bekannt sind.

§. 3. Die Auflösung dieser Aufgabe beruht auf Integration der équations linéaires. Euler hat zuerst diese Integration in den Miscellaneis Berolinensibus Tom. 7. bekannt gemacht: nach ihm haben viele Analysten diese Integrationen bearbeitet. D'Alembert in Reflexions sur les verts; Bougainville im zweyten Theil des Traité du Calcul Integral: Coussin im ersten Theil der Leçons de Calcul integral, und la Croix im zweyten Theil des Traité du Calcul differentiel et integral. Unter den Methoden, die Equations linéaires zu integriren, gefällt mir vorzüglich die in Eulers zweytem Theile Institution. Calculi integralis, pag. 407 seqq. zu finden ist; dieselbe gefällt mir wegen der Simplicität und des regulären Ganges. Jedoch werde ich mich der allgemeinen Formuln nicht bedienen, weil deren Anwendung auf besondere Fälle etwas beschwerlich ist; ich werde jeden Fall besonders betrachten.

§. 4. Die Series, welche für die gegenwärtige Untersuchung geschickt sind, bestehen aus Brüchen, deren Nenner in der Progression der figurirten Zahlen, oder solcher Zahlen fortgehen, die auf beständige Differenzen führen. Z. B. $1 \pm \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \pm \frac{1}{20} + \frac{1}{35}$ etc.

§. 5. Die einfachsten dieser Series sind die Harmonischen, nämlich

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+m} + \frac{1}{n+2m} + \frac{1}{n+3m} + \ldots$$

Digitized by Google

Man sucht also die Summe

$S = \frac{1}{n} + \frac{x}{n+m} + \frac{x^2}{n+2m} + \frac{x^3}{n+3m} + \text{etc.}$, wenn diese Series multipliciert wird mit n, $n+m$, $n+2m$, $n+3m$, so bekommt man

$Z = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots = \frac{1}{1-x}$. In der Formul für Z wird $a = n$, $\Delta A = m$, $\Delta^2 A = 0$; folglich (§. 1.) wird

$Z = nS + \frac{mSxdS}{dx}$, oder $\frac{dx}{m(1-x)} = \frac{n}{m} S dx + x dS$.

Der Multiplicator, welcher das zweyte Glied der Equation integrabel macht, ist $x^{\frac{n}{m}-1}$; also

$\frac{x^{\frac{n}{m}-1} dx}{m(1-x)} = \frac{n}{m} S x^{\frac{n}{m}-1} dx + x^{\frac{n}{m}} dS$; das Integral giebt

$\frac{\int x^{\frac{n}{m}-1} dx}{m(1-x)} = S x^{\frac{n}{m}}$. Wenn man $x^{n:m} = u$ setzt, so bekommt man $\int \frac{du}{1-u^{m:n}} = nSu$. Ist der erste Terminus $n = 1$, und die Differenz eine ganze Zahl, so kann die Summe S genau gefunden werden. Es sey $m = 3$ und $n = 1$, damit die Series $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \text{etc.}$ summirt werden. Also wird $\frac{du}{1-u^3} = \frac{A\,du}{1-u} + \frac{Bu+C}{1+u+u^2} du$.

Weil in dieser Rechnung das Integral des zweyten Terminus oft gebraucht wird, so ist nöthig zu erinnern, dafs dieses Integral sey $= \frac{B}{2} \log. (1+u+u^2)$

$+ \left(C - \frac{B}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{3}}$ Arc. tang. $\frac{2u-1}{\sqrt{3}} + D$. Es ist aber

Digitized by Google

$A = B = \frac{1}{3}$ und $C = \frac{2}{3}$, folglich $\int \frac{du}{1-u^3} = \frac{1}{3}\log.\frac{1}{1-u}$

$+\frac{1}{6}\log.(1+u+u^2)+\frac{1}{3\sqrt{3}}$ Arc. tang. $\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+D.$

Endlich $\int \frac{dx}{1-x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}\log.\frac{1}{1-x^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{6}\log.(1+x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}})$

$+\frac{1}{3\sqrt{3}}$ Arc. tang. $\frac{(2x^{\frac{3}{2}}-1)}{\sqrt{3}}+D = Sx.$ Wenn $x = 0$,

wird das erste Glied $= 0$, also $D = \frac{-1}{3\sqrt{3}}$ Arc. tang. $\frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Es ist aber Arc. tang. $\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}-1}{\sqrt{3}}\right)$ — Arc. tang. $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

$=$ Arc. tang. $\frac{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}}{2+x^{\frac{3}{2}}}$, folglich $S = \left\{\frac{1}{3}\log.\frac{1}{1-x^{\frac{3}{2}}}\right.$

$\left.+\frac{1}{6}\log.(1+x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}})+\text{Arc. tang.}\frac{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}}{2+x^{\frac{3}{2}}}\right\} : x^{\frac{3}{2}}.$

Jedoch diese Summation ist nicht nützlich, wenn $x = 1$, also nicht geschickt zur Summation der Series $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}$ etc., weil $S = \infty$ wird. Dieselbe Unbequemlichkeit findet sich in den Series, wo die Termini gleiche Zeichen haben. Ich bin daher genöthigt, die Series mit abwechselnden Zeichen zu betrachten.

§. 6. Wollte man die Series $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+$ etc. summiren, so wäre $S = 1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{7}-\frac{x^3}{10}+$ etc., und $z = 1-x+x^2-x^3 = \frac{1}{1+x}$, folglich $Sx = \int \frac{dx}{1+x^3}$

oder $= \int \frac{du}{1+u^3} = \int\left\{\frac{A\,du}{1+u}+\frac{Bu\,du+C\,du}{1-u+u^2}\right\}$

Digitized by Google

$$= \frac{\log.(1+u)}{3} - \frac{\log.(1-u+u^2)}{6}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ Arc. tang. } \frac{2u-1}{\sqrt{3}} + D, \text{ endlich}$$

$$S = \left[\frac{\log.(1+x^{\frac{1}{3}})}{3} - \frac{\log.(1-x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})}{6}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ Arc. tang. } \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{2+x^{\frac{1}{3}}}\right] : x.$$

Ist $x = 1$, so bekommt man

$$S = 1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{10} + \text{etc.}$$

$$= \frac{\log. 2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ Arc. tang. } \sqrt{3} = \frac{0{,}6931471}{3}$$

$$+ \frac{\text{Arc. } 60^\circ}{\sqrt{3}} = 0{,}2310491 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0{,}835631.$$

§. 7. Hieraus folgt, dafs

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{10} + \text{etc.} - \frac{\log. 2}{3}.$$

In Eulers Introductio in Analysin Infinitorum, pag. 138. findet man

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \text{etc.}$$

§. 8. Die Integration der Equation $\int \frac{du}{1+u^m}$, wo $u = \overset{1}{x^m}$ bezeichnet, kann nach dem Cotesischen Theorem, oder nach den Formuln der Introductio in Analysin etc. des grofsen Eulers (pag. 116.) gemacht werden, wenn der Divisor $1 + u^m$ in Factoren zertheilt wird. Ist die Differenz $m = 4$, also die Series

$= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} +$ etc., so ist $\frac{1}{1+u^4} = \frac{A+Bu}{1-u\sqrt{2}+u^2}$

$+ \frac{C+Du}{1+u\sqrt{2}+u^2}$, folglich $A = C = \frac{1}{2}$, $B = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$,

und $D = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, also $\frac{du}{1+u^4}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}-u}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-u\right)^2+\frac{1}{2}}du + \frac{\sqrt{2}+u}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+u\right)^2+\frac{1}{2}}du\right];$$

das Integral giebt

$$\int\frac{du}{1+u^4} = -\frac{\text{Arc. tang. }(1-u\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} - \frac{\log.(1-u\sqrt{2}+u^2)}{4\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{\text{Arc. tang. }(1+u\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} + \frac{\log.(1+u\sqrt{2}+u^2)}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\log.\frac{1+u^4}{(1-u\sqrt{2}+u^2)^2}}{4\sqrt{2}} + \frac{\text{Arc. tang. }\frac{u\sqrt{2}}{1-u^2}}{2\sqrt{2}} + E,$$

Die Constante E ist $= 0$, wenn $x^{\frac{1}{4}}$ oder $u = 0$ wird. Endlich die gesuchte Summe

$$S = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,l.\frac{1+\sqrt[4]{x}}{1-x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{Arc. tang. }\frac{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{1-\sqrt{x}},$$

alles getheilt durch $\sqrt[4]{x}$. Für die Series

$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} +$ etc., ist $x = 1$, also die Summe

$$S = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log.\frac{2}{(2-\sqrt{2})^2} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{1,7637597}{4\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{3,1415926}{4\sqrt{2}} = 0,867163.$$

§. 9. Es ist also

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \text{etc.} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\log.\frac{2}{(2-\sqrt{2})^2}$$

Digitized by Google

In Eulers Introductio (pag. 140.) findet man

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{15}+\right).$$

§. 10. Nach diesen Beyspielen wollen wir zur Summation der Series übergehen, wo die Nenner Zahlen sind, deren zweyte Differenzen beständige Grösen sind. Z. B. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+$ etc. In diesem Falle ist $a=1$, $\Delta A=2$, $\Delta^2 A=1$, und $\Delta^3 A=0$ (§. 1.), folglich muſs die Equation $Z=\frac{1}{1+x}=S+\frac{2x\,dS}{dx}+\frac{x^2\,ddS}{2\,dx^2}$ integrirt werden. Man multipliciere mit x^m, so bekommt man die Equation I. oder $\frac{x^m dx}{1+x}=Sx^m dx+2x^{m+1}dS+\frac{x^{m+2}ddS}{2dx}$. Man setze das Integral $\int\frac{x^m dx}{1+x}=Ex^{m+1}S+Fx^{m+2}\frac{dS}{dx}$ (II.).

Das Differenzial dieser Equation muſs identisch mit der Equation I. seyn, nämlich $\frac{x^m dx}{1+x}=Ex^{m+1}dS+(m+1)Ex^m S dx+Fx^{m+2}\frac{ddS}{dx}$, also $2=E+(m+2)F+(m+2)Fx^{m+1}dS$ und $(m+1)E=1$, und $F=\frac{1}{2}$, folglich $E=\frac{1}{1+m}$, und $m^2-m=0$, also $m=0$, oder $m=1$. Wir wollen der Kürze wegen $m=0$ setzen, und die Equation II. wird in diese verändert

$$\int\frac{dx}{1+x}=\log.\overline{1+x}=xS+\frac{x^2 dS}{2dx};$$

Digitized by Google

diese mit dx multipliciert, giebt $dx \log.(1+x) = Sx\,dx + \frac{x^2 dS}{2}$, wovon das Integral offenbar ist,

$(1+x)(\log.\sqrt{1+x}-1)+C=\frac{Sx^2}{2}$. Verschwindet x, so wird $C=1$, endlich $\frac{Sx^2}{2}=(1+x)\log.\sqrt{1+x}-x$, oder

$$S=\frac{2}{x^2}(\sqrt{1+x}\log.\sqrt{1+x}-x)=-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{10}+\text{etc.}$$

Ist $x=1$, so wird

$S=\log. 16-2=0{,}7725887=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\text{etc.}$

Für $x=2$ ist

$$S=1-\frac{2}{3}+\frac{2^2}{6}-\frac{2^3}{10}+\text{etc.}=\frac{\log. 3^3}{2}-1=0{,}6479184.$$

§. 11. Noch ein Beyspiel der Series, deren Nenner solche Zahlen sind, welche beständige dritte Differenzen haben, z. B. $1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{10}-\frac{x^3}{20}+\text{etc.}$

Die allgemeine Equation

$$Z=Sa+\frac{\Delta A\,x\,dS}{dx}+\frac{\Delta^1 A x^2 dds}{2dx^2}+\frac{\Delta^2 A x^3 d^3 S}{6dx^3}$$

wird in diese übergehen

$$\frac{1}{1+x}=S+\frac{3x\,dS}{dx}+\frac{3x^2 ddS}{2dx^2}+\frac{x^3 d^3 x}{6dx^3}\ (\text{I.}),$$

welche, mit $x^n dx$ multipliciert, giebt

$$\frac{x^n dx}{1+x}=Sx^n dx+3x^{n+1}dS+\frac{3x^{n+2}ddS}{2dx}+\frac{x^{n+3}d^3}{6dx^2}\ (\text{II}).$$

Das Integral dieser Equation sey

$$\int\frac{x^n dx}{1+x}=ESx^{n+1}+Fx^{n+2}\frac{dS}{dx}+6x^{n+3}\frac{ddS}{dx^2}\ (\text{III}).$$

Digitized by Google

Das Differenzial dieser Equation III. nämlich

$$\frac{x^n dx}{1+x} = (n+1) E S x^n dx + E x^{n+1} dS + (n+2) F x^{n+1} dS$$
$$+ F x^{n+2} \frac{d d S}{dx} + (n+3) G x^{n+2} \frac{d d S}{dx} + \frac{G x^{n+3} d^3 S}{dx^2},$$

muſs mit der Equation (II.) identisch seyn, folglich

$$E = \frac{1}{n+1}, \quad E + (n+2) F = 3, \text{ also}$$
$$1 + (n+2)(n+1) F = 3(n+1), \text{ ferner}$$
$$(n+3) C + F = \tfrac{1}{2}, \text{ und } G = \tfrac{1}{6}, \text{ also } F = \frac{6-n}{6},$$

also durch die Substitution findet man $-n^3 + 3n^2 - 2n = 0$. Diese Equation hat drey Wurzeln, nämlich 0, 1 und 2. Der Kürze wegen werde ich, wie zuvor, die Wurzel $n = 0$ gebrauchen, also wird $E = F = 1$, und $G = \frac{1}{6}$, folglich bekommt man für die Equation III. diese, $\text{l.}\overline{1+x} = Sx + \frac{x^2 dS}{dx} + \frac{x^3 d d S}{6 d x^2}$ (IV.), welche, so wie die Equation I. des vorhergehenden §., integrirt wird. Man multipliciere sie also mit $x^m dx$, und es wird

$$x^m dx \, \text{l.}\overline{1+x} = S x^{m+1} dx + x^{m+2} dS + \frac{x^{m+3} d d s}{6 dx^2} \text{ (V).}$$

Das Integral, welches allezeit aus den zwey ersten Terminis analogisch angenommen wird, sey

$$\int x^m dx \, \text{l.}\overline{1+x} = H S x^{m+2} + K x^{m+3} \frac{dS}{dx} \text{ (VI.).}$$

Das Differenzial $x^m dx \, \text{l.}\overline{1+x} = H(m+2) S x^{m+1} dx + H x^{m+2} dS + K x^{m+3} \frac{d d S}{dx} + K(m+3) x^{m+2} dS$, verglichen mit der Equation (V.), giebt $H = \frac{1}{m+2}$ und

Digitized by Google

$K = \frac{1}{6}$, und $H + K(m+3) = 1$, endlich $m^2 - 5m = 0$, also $m = 0$ und $m = 5$. Nimmt man $m = 0$, so entsteht aus der Equation (VI.) diese

$$(1+x)(\log. \overline{1+x} - 1) = \frac{Sx^2}{2} + \frac{x^3\,dS}{6\,dx} + C.$$

Wenn $x = 0$, wird $C = 1$; folglich

$$(1+x)\log.(1+x) - x = \tfrac{1}{6}\left[3\,S\,x^2 + \frac{x^3\,dS}{dx}\right].$$

Dies multipliciert mit dx, kommt

$$\int\left(dx\,[(1+x)\log.(1+x) - x\,dx]\right) = \frac{Sx^3}{6} + C.$$

Es sey $l.\overline{1+x} = u$, so verändert sich diese Gleichung in

$$\int e^{2u}u\,du = \frac{e^{2u}u}{2} - \frac{e^{2u}}{4} = \frac{(1+x)^2}{2}(l.\overline{1+x} - \tfrac{1}{2}) + C,$$

also die Constante $C = \frac{1}{4}$, folglich

$$\frac{(1+x)^2}{2}\,\frac{l.\overline{1+x}}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} = \frac{Sx^3}{6}, \text{ und}$$

$$S = 3(1+x)^2\log.(1+x) - 3x - \frac{9x^2}{2}, \text{ alles getheilt}$$

durch x^3. Es sey $x = 1$, so wird die Summe der Series

$$= 1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{20} + \text{etc.}$$

$$= 12\log. 2 - 7{,}5 = 8{,}317764 - 7{,}5 = 0{,}817764.$$

§. 12. Vermittelst der Integrationen können auch Series auf folgende Weise summirt werden. Wenn S die unbekannte Summe einer Series bezeichnet, und man findurch differenziiren, dafs $\frac{dS}{dx}$ einer bekannten Summe gleich sey $= Z$, so wird $\frac{dS}{dx} = Z$, also $S = \int Z\,du$.

Digitized by Google

Beyspiel.

Man sucht die Summe der Series

$$x - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^5}{5} - \frac{4x^7}{7} + \text{etc.} = S, \text{ so ist}$$

$$\frac{dS}{dx} = 1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + \text{etc.} = \frac{1}{(1+x^2)^2} = Z,$$

folglich

$$S = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{\text{Arc.}}{2} \sin. \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C,$$

wenn x verschwindet, wird $S = 0$ und $C = \frac{\pi}{4}$,

folglich $S = \frac{\pi}{4} - \frac{\text{Arc.}}{2} \sin. \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$.

Dieses Integral wird leicht gefunden, wenn $\frac{1}{1+x^2} = y^2$ gesetzt wird. Ist $x = 1$, so wird

$$S = 1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{5} - \tfrac{4}{7} + = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$= 0{,}3926991 + 0{,}353553 = 0{,}746252. \text{ Also}$$

$$\frac{\pi}{8} = 1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{5} - \tfrac{4}{7} + \text{etc.} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Es ist bekannt, dafs $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.})$.

Zweytes Beyspiel.

§. 13. Man sucht die Summe

$$S = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{4.5} - \frac{x^7}{6.7} + \text{etc., folglich}$$

$$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \text{etc., und}$$

Digitized by Google

$\frac{ddS}{dx^2} = -x+x^3-x^5+ = -x(1-x^2+x^4-) = \frac{-x}{1+x}$.

Also $\frac{ddS}{dx^2} = \frac{-x}{1+x}$, das erste Integral giebt

$\frac{dS}{dx} = -x + \log.(1+x) + C$, wenn x verschwindet, wird $\frac{dS}{dx} = 1$, und $C = 1$, folglich $\frac{dS}{dx} = -x + 1 + \log.(1+x)$. Das zweyte Integral wird gefunden

$S = -\frac{x^2}{2} + x + (1+x)\log.(1+x) - 1 - x + C$

$= -\frac{x^2}{2} - 1 + \overline{1+x}\log.(1+x) + C$. Wenn $x = 0$, wird $S = 0$, also $C = 1$. Es ist also die gesuchte Summe $S = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{4.5} - \frac{x^7}{6.7} + \text{etc.} = -\frac{x^2}{2} + (1+x)\log.(1+x)$. Für $x = 1$ wird die Series

$1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} - \frac{1}{6.7} = -0{,}5 + 1{,}386294 = 0{,}886294.$

§. 14. Aus diesen zweyen Beyspielen erhellet der Gebrauch dieser Summationsmethode. Um beyde Methoden mit mehrern Beyspielen zu erläutern und zu erweitern, das erlauben mir meine sehr schwachen Augen nicht. Analysten werden mit geringer Mühe mehrere Series summiren, und aus der Vergleichung der Summationsformuln allgemeinere Sätze ableiten. Sollte es wohl unnütz seyn, die vielen summirten, besonders durch Euler gefundenen Series, in tabellarische Ordnung zu bringen? Mir däucht, dafs dadurch die Grenzen der Analysis sehr könnten erweitert werden.

Digitized by Google

V.

Kurzer Entwurf einer Approximationsmethode, die Laufbahn eines Cometen oder neuen Planeten zu bestimmen.

Es ist den Astronomen bekannt, dafs die Laufbahn eines Planeten vermittelst dreyer Beobachtungen aus dem Ort des Knotens und dem Neigungswinkel kann bestimmt werden. Könnte also eine Methode gefunden werden, aus einigen Observationen den Knoten und die Neigung unmittelbar, ohne willkührliche Voraussetzungen, abzuleiten, wenn auch nicht ganz genau, so würde man einen regelmäfsigen Gang in den Berechnungen folgen können, ohne mit Muthmafsungen einer angenommenen Distanz des Planeten in weitläuftigen Rechnungen herum zu irren. — Dieser Entwurf hat die Absicht, aus zweyen Beobachtungen den Knoten und die Neigung der Laufbahn nahe genug zu finden.

§. 1. Ich nehme an, dafs der Planet in dem Zwischenraume der beyden Observationen den Bogen eines Cirkels beschreibe, oder dafs seine Laufbahn ein Kreis sey. (Fig. II.)

Der Planet steht bey P und Q, wenn die Erde sich bey T und t befindet. Die Umlaufszeiten des Planeten und der Erde bezeichne man mit P und p, die Weiten des Planeten von der Sonne, oder $SP = SQ = x$, der mittlere Abstand der Sonne und der Erde $= 1$, so ist

$p^2 : 1 = P^2 : x^3$ und $x^3 = \frac{P^2}{p^2}$. Der Bogen PQ ist in der Zeit π durchlaufen, also wegen der angenommenen gleichförmigen Bewegung $PQ : 360° = \pi : P$, folglich $P = \frac{360° . \pi}{PQ}$. Bringt man diesen Werth des P in die Equation $x^3 = \frac{P^2}{p^2}$, so bekommt man

$$x^3 = \left(\frac{360° . \pi}{p}\right)^2 \times \frac{1}{PQ^2}.$$

§. 2. Um den Bogen PQ oder den Winkel PSQ zu finden bemerke man, dafs $SPQ = PSL - QL$, und $QL = QS\lambda - L\lambda$, also $PQ = PSL - QS\lambda + L\lambda$, wo $L\lambda$ den Unterschied der Oerter der Sonne für die gegebenen Zeiten der Beobachtungen ist; die Winkel an der Sonne PST und QSt können nahe genug auf folgende Weise gefunden werden.

Es ist nämlich sin. $SPT = \frac{a \text{ sin. } T}{x}$, und sin. $SQt = \frac{b \text{ sin. } t}{x}$, wo $ST = a$ und $St = b$ angenommen sind. Die Winkel bey P und Q sind die jährlichen Parallaxen, welche in der Zwischenzeit von wenigen Tagen nicht viel differiren, insonderheit bey Planeten; dafs man also für die Differenz ihrer Sinus die Differenz der Bogen setzen kann, folglich wird

$$SPT - SQt = \frac{a \text{ sin. } T - b \text{ sin. } t}{x}.$$

Der Kürze wegen setze man $D = a$ sin. $T - b$ sin. t, so wird $SPT - SQt = \frac{D}{x}$.

Digitized by Google

Es ist aber $PST = 180° - T - SPT$ und $QSt = 180° - t - SQt$; daher wird $PSL - QS\lambda = t + SQt - SPT - T = t - T + \frac{D}{x}$. Endlich bekommt man $PQ = t - T + \lambda L + \frac{D}{x} = \gamma + \frac{D}{x} = \frac{\gamma x + D}{x}$, wo $t - T + L\lambda = \gamma$. Wird der gefundene Werth des Bogens PQ in die Equation §. 1. substituirt, so bekommt man $x^3 = \left[\frac{360° \cdot \pi}{p}\right]^2 \frac{x^2}{(\gamma x + D)^2}$ also wird $x(\gamma x + D)^2 = \left[\frac{360° \cdot \pi}{p}\right]^2$. Nennt man das zweyte Glied der Equation $= A$, und setzt $D + \gamma x = y$, folglich $x = \frac{y - D}{\gamma}$, so entsteht diese cubische Equation $y^3 - Dy^2 - A\gamma = 0$.

§. 3. Mit der gegebenen geocentrischen Breite $= G$, und dem Winkel $T =$ der Differenz zwischen den Längen des Planeten und der Sonne, wird die heliocentrische Breite $= H$ gefunden. Es ist nämlich

$$\text{sin. } SPT = \frac{a \text{ sin. } T}{x} \text{ (§. 2.) und}$$

$$\text{sin. } T : \text{sin. } (T + SPT) = \text{tang. } G : \text{tang. } H.$$

Für die zweyte Beobachtung bey Q sey $g =$ der geocentrischen und $h =$ der heliocentrischen Breite, so findet man gleichfalls $\text{sin. } SQt = \frac{b \text{ sin. } t}{x}$, und

$$\text{tang. } h = \text{sin. } (t + SQt) \text{ tang. } g : \text{sin. } t.$$

§. 4. In Fig. III. ist der Knoten bey N, die Ecliptik NE, und NL die Laufbahn des Planeten, ferner ist

Digitized by Google

$\pi p = H$ und $KQ = h$. Der Unterschied der Längen des Planeten in P und Q, oder PQ ist aus §. 2. bekannt, der Neigungswinkel $LNE = I$.

Die sphärischen Dreyecke πPN, KQN geben tang. $N = \frac{\text{tang. } H}{\text{sin. } NP} = \frac{\text{tang } h}{\text{sin. } NQ}$, also $\frac{\text{tang. } H}{\text{tang. } h} = \frac{\text{sin. } NP}{\text{sin. } NQ}$

$= \frac{\text{sin. } (NQ + QP)}{\text{sin. } NQ} = \text{cot. } NQ \times \text{sin. } QP + \text{cos. } QP$,

folglich cot. $NQ = \left(\frac{\text{tang. } H}{\text{tang. } h} - \text{cos. } QP\right) : \text{sin. } QP$, oder

$$\text{tang. } NQ = \frac{\text{tang. } PQ}{\frac{\text{tang. } H}{\text{tang. } h \text{ M cos. } PQ} - 1}.$$

Es ist aber (Fig. II.) der Bogen $Q\lambda =$ dem Winkel QSt für den Ort der Sonne bey λ in der zweyten Beobachtung, dadurch ist der Ort des Knotens $\curlywedge$ der Länge der Erde in λ — den Winkel $P\lambda = PQ + Q\lambda$. Endlich wird der Neignngswinkel I aus der Equation tang. I = tang. K : sin. NQ gefunden.

§. 5. Die erklärte Methode werde ich durch ein Beyspiel erläutern. Ich werde zwey Beobachtungen der Ceres des Herrn Piazzi gebrauchen; mittlere Zeit zu Palermo *) 1801.

	Beobacht. Länge	Beobachtete südl. Breite	Ort der Sonne
31. Jan. $6^h 48' 32''$	$1^s 24° 38' 9''$	$1° 10' 45''$	$10^s 10° 29' 27''$
11. Febr. $6^h 11' 57''$	$1^s 26° 26' 26''$	$0° 35' 48''$	$10^s 22° 36' 56''$
$\pi = 10{,}975$ Tage			$L\lambda = 12° 7' 29''$

Ferner war log. $a = 9{,}993724$ und log. $b = 9{,}994594$

*) Astronomisches Jahrbuch vom Jahr 1805. Seite 204.

Digitized by Google

Es ist also

$T = 1^s\ 24°\ 38'\ 9'' - 10^s\ 10°\ 29'\ 27'' = 104°\ 8'\ 42''$ und der Winkel $t = 93°\ 49'\ 30''$, folglich ist

$\gamma = t - T + L\lambda = 1°\ 48'\ 17'' = 1°{,}804$. Diese Grade müssen in Theile des Radius verändert, und mithin durch $R° = 57°{,}2955$ getheilt werden,

also log. $\gamma°$	=	0,2562365
log. $R°$	=	1,7581205
log. γ	=	8,4981160
log. a	=	9,9937240
log. sin. T	=	9,9866201
		9,9803441
und a sin. T	=	0,955750
log. b	=	9,9945940
log. sin. t	=	9,9990729
		9,9936669
und b sin. t	=	0,985433
folglich D	=	0,029683
log. π	=	1,0404045
log. 360°	=	2,5563020
		3,5967065
log. p	=	2,5625902
		1,0341163
log. $R°$	=	1,7581205
		9,2759958 = l. $\frac{360° \cdot \pi}{p}$ reductus
		2
		8,5519916 = log. $\left(\frac{360° \cdot \pi}{p}\right)^2$
		8,4981160 = log. γ
		7,0501076 = log. A
und A	=	0,0011223

Digitized by Google

Die allgemeine Equation $y^3 - Dy^2 - A$ *) $= 0$ wird verändert in $y^3 - 0{,}029683\ y^2 - 0{,}0011223 = 0$. Für $y = \frac{1}{9}$ bleibt die Summe der Equation noch negativ. Um die Rechnung zu verkürzen, bediene man sich der Logarithmen

log. $\frac{1}{9}$	$= 9{,}0457574$	log. $(\frac{1}{9})^3$	$= 7{,}1372722$
log. $(\frac{1}{9})^2$	$= 8{,}0915048$	$(\frac{1}{9})^3$	$= 0{,}0013717$
log. D	$= 8{,}4725078$		
log. Dy^2	$= 6{,}5640226$	und $-Dy^2$	$= -0{,}0003664$
		$-A$	$= -0{,}0011223$
			$-0{,}0014887$

so ist die Summe der Equation $= -0{,}000117$.

Ist $y = \frac{1}{8}$ so wird die Summe der Equation $= +0{,}000368$. Also fällt die Wurzel oder y zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$, sie ist nämlich $y = 0{,}111$, folglich findet man

$$x = \frac{y - D}{\gamma} = \frac{0{,}111 - 0{,}0296}{\gamma}.$$

Es ist also log. x = log. $0{,}0813$ — log. γ. Aber

log. $0{,}0813$	$= 8{,}9101440$
log. γ	$= 8{,}4981160$
log. x	$= 0{,}4120280$

die Distanz $x = 2{,}5849$.

Ferner log. sin. SPT = log. a sin. T — log. x

log. a sin. T	$= 9{,}9803441$
log. x	$= 0{,}4120280$
log. sin. SPT	$= 9{,}5683161$
SPT	$= 21^\circ\ 43'\ 14''$
T	$= 104^\circ\ 8'\ 42''$
also PST	$= 54^\circ\ 8'\ 4''$

*) weil γ schon hinein multipliciert ist.

Digitized by Google

log. tang. $G = 8{,}31351136$

log. sin. $(T + SPT) = 9{,}9086961$

$8{,}2222097$

log. sin. $T = 9{,}9866201$

log. tang. $H = 8{,}2355896$

die heliocentrische Breite oder $H = 59'\ 6''$. Auf dieselbe wird die zweyte heliocentrische Breite oder $h = 37'$ gebaut,

Um die Formul tang. $NQ = \frac{\text{tang. } QP}{\frac{\text{tang. } H}{\text{tang. } h \cos. PQ} - 1}$ zu berechnen, mufs der Bogen PQ (Fig. II.) bekannt seyn, oder der Winkel PSQ. Es ist aber $PSQ = PST - QSt + L\lambda = 54°\,8'\,4'' - 64°\,41'\,14'' + 12°\,7'\,29'' = 1°\,34'\,19''$.

Nun ist log. tang. $h = 8{,}0738371$

log. cos. $PQ = 9{,}9998366$

$8{,}0736737$

log. tang. $H = 8{,}2355896$

$0{,}1619159$

$\frac{\text{tang. } H}{\text{tang. } h \cos. PQ} = 1{,}45183$

$- 1 \ldots\ldots$

Denominator $= 0{,}45183$

dessen logar. $= 9{,}6549731$

log. tang. $PQ = 8{,}4384235$

log. tang. $NQ = 8{,}7834484$

und $NQ = \quad 3°\ 28'\ 32''$

der Ort der Erde bey λ ist $= 4^s\ 22°\ 36'\ 56''$

der Winkel QSt oder $Q\lambda = 2\quad 4\ 41'\ 14$

heliocentr. Länge der Ceres $= 2^s\ 17°\ 55'\ 42''$

$NQ = \quad 3°\ 28'\ 32''$

Länge des Knotens $= 2^s\ 21°\ 24'\ 14''$

Digitized by Google

Endlich log. tang. $h = 8{,}0738371$
log. sin. $NQ = 8{,}7826455$
log. tang. $I = 9{,}2911916$
also der Neigungswinkel $I = 11° 3'$.

Diese zwey Elemente der Bahn der Ceres, welche dieser erste Versuch gegeben hat, weichen nicht viel von den bekannten verbesserten Elementen ab; allein für Cometen möchte man wohl zwey solche Versuche machen, und das Mittel der beyden Resultate für die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn annehmen.

§. 6. Aus der Länge des Knotens und der Neigung der Bahn können die übrigen Elemente, nämlich der Ort des Apheliums, die Excentricität, der mittlere Abstand oder die Umlaufszeit, und auch eine Epoche, vermittelst dreyer beobachteter Längen und Breiten abgeleitet werden. Bey den Cometen braucht man nur zwey Observationen, wenn die Laufbahn nach einer Parabel bestimmt wird. Man mufs die wahren Distanzen der Sonne und des Planeten, und die Winkel zwischen diesen Distanzen berechnen. Aus den dreyen Abständen und den Zwischenwinkeln sucht man die wahren Anomalien, also den Ort des Apheliums, hernach die Excentricität und die halbe Axe. Zur Prüfung dieser gefundenen Elemente der Bahn müfste die geocentrische Länge und Breite für die gegebene Zeit einer Observation berechnet werden. Die Resultate mit den Beobachtungen verglichen, würden sodann die erforderlichen Correctionen der angenommenen Elemente anzeigen. Wollte man dieselbe Methode, als Euler

Digitized by Google

in seinen Recherches et Calculs sur la vraie Orbite de la Comete de 1769, befolgen, so nimmt man zwey Hypothesen, eine wo die Inclination, die andere, wo der Ort des Knotens verändert angenommen wird. Ich zweifle nicht, dafs auch andere Methoden, die Bahn eines Planeten aus approximirten Elementen zu verbessern, können gebraucht werden. Ich habe der Eulerschen Meldung gethan, weil Euler jetzt seltner genannt wird. Waren wohl im 18ten Jahrhundert mehr originelle Analytiker, als Joh. Bernoulli, L. Euler und de la Grange?

§. 7. Vielleicht könnte es einigen Liebhabern der Astronomie nicht unangenehm seyn, die nöthigen Formuln zur Berechnung der Laufbahn bey einander zu sehen. Bezeichnet man mit S die Differenz der Oerter des Knotens und der Erde, mit T den Winkel an der Erde, und mit a den Abstand der Erde von der Sonne, so hat man die distantia curtata der Erde und des Planeten $= \frac{a \text{ sin. } S : \text{sin. } (T+S)}{\text{tang. } G : \text{tang. } I \text{ sin. } (T+S) - 1} = \pm f$, aus $+$ oder $-f$, aus a, und dem Winkel T sucht man die distantia curtata der Sonne und des Planeten, diese sey $= c$; dann erhält man tang. $H = f$ tang. $G : c$ und den wahren Abstand oder $R = c : \text{cos. } H$. Der Abstand des Planeten in der Orbite vom Knoten, oder dessen Sinus $=$ sin. R : sin. I; dieser Bogen sey $= M$. Auf dieselbe Weise sucht man die wahren Weiten der Sonne und des Planeten für die zweyte und dritte Beobachtung, welche mit r, ϱ bezeichnet seyn sollen, so wie die Elon-

Digitized by Google

gationen der Erde und des Knotens mit m und n, so wird $n - m = \varphi$ der Winkel zwischen den Radiis Vectoribus r und R; so auch $n - m = \varphi'$ derselbe zwischen ϱ und R.

Es sey ferner $\alpha =$ der wahren Anomalie für die erste Distanz R, also $\alpha + \varphi$, $\alpha + \varphi'$ die Anomalien für die Distanzen r und ϱ, so erhält man

$$\text{tang. } \alpha = \frac{(R-r)\varrho . B . \sin. \frac{\varphi'}{2} - (R-\varrho) r \sin. \frac{\varphi}{2}}{(R-\varrho) r \cos. \frac{\varphi}{2} - (R-r)\varrho . B . \cos. \frac{\varphi'}{2}},$$

wo $B = \sin. \frac{\varphi'}{2} : \sin. \frac{\varphi}{2}$ ist; ferner die Excentricität $e = \frac{R - r}{r \cos. (\alpha + \varphi) - R \cos. \alpha}$, und endlich den mittlern Abstand $F = \frac{(1 + e \cos. \alpha) R}{1 - e^2}$ *). Ist dieser Abtsand $= F$, so ist die Umlaufszeit $= \sqrt{F^3}$. Endlich giebt $M \mp \alpha$ die Elongation des Knotens im Aphelio; und also ist der Ort des Apheliums bekannt. — Will man die Epoche für die Zeit der ersten Observation nehmen, so suche man die excentrische Anomalie E. Es ist nämlich $\text{tang. } \frac{E}{2} = \text{tang. } \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$, und die mittlere Anomalie oder $A = E + e \sin. E$. Die Summe $A +$ den Ort des Apheliums giebt die Epoche für die gegebene Zeit.

*) Alle diese Formuln und ihre Anwendung habe ich bewiesen in meinen Dissertations Physiques et Mathematiques. Utrecht 1778. Seite 36—46.

Digitized by Google

§. 8. Ich werde nichts mehr von der Verbesserung der Elemente der Laufbahn sagen (§. 6.), dieselben möchten nach den Umständen verändert werden, nachdem eine gröfsere Abweichung der Theorie von den Beobachtungen gefunden wird. Es war nicht schwer, die Laufbahn des Uranus zu berechnen, weil seine Bewegung sehr langsam ist, also in einigen Monaten gleichförmig konnte angenommen werden, und weil aufserdem der Neigungswinkel sehr klein ist. Mehreren Schwierigkeiten mufste diese Untersuchung über Pallas und Juno unterworfen seyn. Man erwarte nicht Berechnungen, die zur Erläuterung der Bestimmung der Elemente (§. 5. 6.) erfordert werden. Die zunehmende Schwachheit meiner Augen, die mir mit Blindheit droht, verhindert ein solches Unternehmen. Seitdem Herr Wagner aus Leipzig, der die Mühe über sich genommen hat, die Correction dieser Abhandlungen zu besorgen, die Stadt Utrecht verlassen hat, habe ich keinen Gehülfen mehr für solche weitläuftige Rechnungen.

Zusatz des Herausgebers.

Wenn der Planet rückläufig wäre, so ist (Fig. II.) $PQ = QS\lambda - PSL - L\lambda = T - t - L\lambda + \frac{D}{x}$ oder $= \frac{\gamma x + D}{x}$ wenn $\gamma = T - t - L\lambda$. — Wenn in der Gleichung $\text{tang. } NQ = \frac{\text{tang. } PQ}{\frac{\text{tang. } H}{\text{tang. } h \cos. PQ} - 1}$ das erste Glied des Divisors kleiner ist als 1, so wird NQ negativ, und mufs statt addirt, abgezogen werden. — Ist die

Breite des Planeten südlich und zunehmend, so erhält man nothwendigerweise den niedersteigenden Knoten; dann ist auch, so wie bey jeder zunehmenden Breite, tang. I = tang. H : sin. NQ; und endlich wird in der obigen Equation der Divisor $= \frac{\text{tang. } h}{\text{tang. } H \times \text{cos. } PQ} - 1$.

Digitized by Google

IV.

Versuch einer neuen Theorie über die Bewegung des Wassers durch Oeffnungen der Gefäfse.

§. 1.

Darf man die Theorien als Hypothesen betrachten, und dieselben nach ihrer Uebereinstimmung mit den Erfahrungen und Erscheinungen prüfen, so kann man schwerlich eine Theorie annehmen, aus welcher merkwürdige Erscheinungen nicht können abgeleitet werden, ausgenommen wenn diese fremden Ursachen zugeschrieben werden könnten. Eine solche Erscheinung ist der zusammengezogene Strahl (vena contracta) des aus freyen Oeffnungen fliefsenden Wassers. Dieser Strahl entsteht in einem kleinen Abstande vor der Oeffnung; er wird nicht durch die sogenannte Reibung des Wassers am Rande der Oeffnung hervorgebracht, wie ich an einem andern Orte gezeigt habe, sondern er scheint ein eigner, ja charakteristischer, Zug der Bewegung des Wassers zu seyn, und dennoch kann man diese Erscheinung aus den berühmten hydrodynamischen Theorieen der Bernoulli's, Euler und d'Alembert nicht ableiten. Sollten daher diese Theorieen nicht einige Verbesserungen erfordern? Aus der Newtonischen Lehre ergiebt sich die Erklärung des zusammengezogenen Wasserstrahls vollkommen, und defshalb sollte man versucht seyn, sie aus ihrer Vergessenheit hervorzuziehn, ob man ihr gleich den Vorwurf macht, dafs sie auf die Erdichtung der sogenannten Catarakte gebaut sey. Um diesem Vorwurfe auszuweichen, habe ich einen Versuch ge-

Digitized by Google

wagt, Newtons Theorie â priori abzuleiten, ohne die Erdichtung der Catarakte zu gebrauchen. Ich weis sehr wohl, was ich unternehme, wenn ich eine neue, von den bisher bekannten Grundsätzen ganz verschiedene, Theorie aufzustellen wage; allein gern unterwerfe ich mich den Kritiken, denn Bernoulli, Euler und d'Alembert hatten ja dasselbe Schicksal.

§. 2. Ungefähr folgende Betrachtungen haben mir den Weg zu meiner Theorie gebahnt. — Die Bewegung des Wassers durch ein bodenloses Gefäfs geschieht zufolge der Gesetze fallender Körper; die Geschwindigkeiten sind wie $\sqrt{AP}$ (Fig. IV.), wie die Quadratwurzeln der Höhen. — Das stillstehende Wasser drückt den Boden BC nach dem Verhältnifs der Höhe AB, und der Druck der Wassermasse $APMD$ ist wie die Höhe AP; hier kommt die Schwere des Wassers in keine Betrachtung. — Man mache eine Oeffnung EF im Gefäfse, so fällt zwar das Wasser aus derselben, im Betracht der Schwere, weil es nicht mehr unterstützt wird, gleichwie alle feste Körper fallen, wenn sie nicht unterstützt werden; auch wird das Wasser, sobald es aus der Oeffnung kommt, den Gesetzen fallender Körper folgen: aber es folgt daraus nicht, dafs man die Gröfse der Bewegung des durch die Oeffnung sich bewegenden Wassers der Schwere zuschreiben müsse, wohl aber dem Drucke: denn dieser, und nicht die Schwere, die nur in senkrechter Richtung wirkt, verursacht den Ausflufs des Wassers aus Seitenöffnungen. Machte man in einem Gefäfse, welches mit kleinen Kugeln angefüllt ist, eine Seitenöffnung, so würden kaum einige davon heraus-

Digitized by Google

fallen, vielleicht nur die, welche sich dicht bey dieser Seitenöffnung befinden. Auch mufs man die Flüssigkeit des Wassers, die vielleicht von dem gegen alle Seiten gleich drückenden Wasser herrührt, als eine Ursache des Ausflusses aus Seitenöffnungen in Erwägung ziehn.

§. 3. Ich nehme also den Druck des Wassers als die Ursache der Bewegung desselben an. Aber wie ist es mit dem Drucke des stillstehenden und laufenden Wassers beschaffen? Wenn der Boden keine Oeffnung hat, und also das Wasser in Ruhe ist, so kann sich der Druck desselben ohne Widerstand nach dem Verhältnifs der Wasserhöhen äufsern. Verstattet man dem Wasser den Ausfluſs durch die Oeffnung EF, so bekommen alle Durchschnitte des Gefäfses Geschwindigkeiten, welche sich umgekehrt wie diese Durchschnitte verhalten. Es sey w = dem Diameter der Oeffnung, und c die Geschwindigkeit des auslaufenden Wassers, z aber der Diameter PM eines Durchschnitts, so ist die Geschwindigkeit des Wassers im Durchschnitte P, $= w^2 c : z^2$. Diese Geschwindigkeit hängt nicht mehr von der Höhe des Wassers ab, sie wird gröfser und kleiner, so wie der Durchschnitt des Gefäfses gröfser oder kleiner wird. Aber diese Geschwindigkeit des Wassers im Durchschnitte PM erzeuget einen Widerstand gegen den Druck der Wassersäule AP, und dieser ist wie das Quadrat der Geschwindigkeit; oder er ist gleich einer Wassersäule, die so hoch ist als die Höhe, der die Geschwindigkeit zugehört. Ich stelle mir den Druck im flieſsenden Wasser ungefähr so vor, wie die Wirkung einer flüssigen Materie auf einen bewegten Körper. Wenn c die Ge-

Digitized by Google

schwindigkeit ist, mit welcher der Wind in die Segel bläst, so ist die Wirkung des Windes auf das Schiff nicht $c^2 f^2$, wenn f^2 die Fläche der Segel ausdrückt. Weil das Schiff mit der Geschwindigkeit v fortgeht, so kann der Wind nur mit der Geschwindigkeit $c - v$ wirken, und also ist die bewegende Kraft nur $(c - v)^2 f^2$. Ist nun n das Verhältnifs der Schwere der Luft und des Wassers, und m^2 die Oberfläche des Vordertheils vom Schiffe, welches den Widerstand des Wassers empfängt, so ist dieser $= nv^2 m^2$, folglich mufs im Beharrungsstande $(c - v)^2 f^2 = nv^2 m^2$ seyn, aus welcher Gleichung die Geschwindigkeit des Schiffs abgeleitet wird.

§. 4. Ich nehme ferner an, dafs alle Durchschnitte PM unter sich und mit dem Horizonte BC (Fig. V.) parallel sind; dieser Parallelismus der Wasserschichten scheint der Natur der flüssigen Körper sehr angemessen zu seyn, wodurch das Gleichgewicht der Wassertheile unterhalten wird. Man ziehe die Vertikale $AB = a$, und nehme $AQ = x$, so wäre der Druck des fliefsenden Wassers auf $PM = \frac{\pi x \times z^2}{4}$, wenn $z =$ dem Diameter des Durchschnitts, und $1 : \pi$ das Verhältnifs des Durchmessers zur Peripherie bezeichnen. — Es sey v die Geschwindigkeit des Wassers im Durchschnitte pm, so ist die der Geschwindigkeit zugehörige Höhe $= \frac{v^2}{4g}$, wenn $g = 15{,}1$ Fufs bezeichnet. Aus dieser Geschwindigkeit wird ein Widerstand gegen den Druck erzeuget, der der Wassersäule $\frac{\pi z^2}{4} \times \frac{v^2}{4g}$ gleich ist, also kann der

Druck des Wassers nur wirken mit der Kraft

$$\frac{\pi z^2 x}{4} - \frac{\pi z^2}{4} \cdot \frac{v^2}{4g} = \frac{\pi z^2}{4}\left(x - \frac{v^2}{4g}\right).$$

Weil man in der Hydraulik auf die Menge des Wassers sieht, die in den Augenblicken dt ausfliefst, und weil der Lauf stetig seyn mufs, so mufs auch beständig die Elementarmasse $PMmp$ der ausfliefsenden Masse in gleichen Zeiten dt gleich seyn. Man mufs also die Bewegung einer solchen Elementarmasse in Erwägung ziehn. Es sey $Qq = dx$, der Diameter $mp = z + dz$, das Element der Geschwindigkeit sey dv, also ist der Druck auf die bewegte Fläche mp,

$$= (z+dz)^2 \frac{\pi}{4}\left(x + dx - \frac{(v+dv)^2}{4g}\right)$$

$$= (z^2 + 2zdz)\frac{\pi}{4}\left(x + dx - \frac{v^2 + 2vdv}{4g}\right).$$

Nun war der Druck auf die Fläche

$$MP = z^2 \frac{\pi}{4}\left(x - \frac{v^2}{4g}\right):$$

also der Unterschied des Druckes auf die beyden Flächen giebt den Druck, mit welchem die Bewegung der elementaren Masse $PMmp$ befördert wird. Dieser Druck ist also $= \left(2zdzx + z^2 dx - \frac{2z^2 vdv}{4g} - \frac{2zdzv^2}{4g}\right)\frac{\pi}{4}$.

Nun aber ist $2zdz.x \times \frac{\pi}{4} = x.d\frac{\pi z^2}{4}$, oder dem Drucke auf das Element des Durchschnitts; auch ist $2zdz.\frac{v^2}{4g} \times \frac{\pi}{4}$ der Widerstand dieses Elements: diese beyden Termini aber kommen nicht in Betrachtung, weil man den Druck auf die Durchschnitte selbst sucht, folg-

Digitized by Google

lich mufs man sie verwerfen, und daher ist der Druck auf die bewegte kleine Masse $Ppm M$

$$= \left\{z^2\,dx - \frac{2z^2 v\,dv}{4g}\right\}\frac{\pi}{4} = \left\{dx - \frac{v\,dv}{2g}\right\}\frac{\pi z^2}{4}.$$

Dividiert man diesen Druck durch die Masse

$PMmp = \frac{\pi z^2\,dx}{4}$, so bekommt man die accelerirende Kraft der Wasserschichte

$$= \left\{dx - \frac{v\,dv}{2g}\right\}\frac{\pi}{4}z^2 : \frac{\pi z^2\,dx}{4} = 1 - \frac{v\,dv}{2g\,dx}.$$

Nun folgt aus den ersten Grundsätzen der Mechanik diese Equation, nämlich $v\,dv = \left\{1 - \frac{v\,dv}{2g\,dx}\right\} 2g\,dx$, oder $v\,dv = 2g\,dx - v\,dv$, oder $2v\,dv = 2g\,dx$. Die Integration giebt $v^2 = 2gx$.

§. 5. Es ist also die Geschwindigkeit oder $v = \sqrt{2gx}$ $= \frac{\sqrt{4gx}}{\sqrt{2}}$, folglich, wenn x die ganze Höhe des Gefäfses bezeichnet, und f^2 die Oeffnung, so würde die Wassermenge durch $\frac{f^2}{\sqrt{2}}\sqrt{4gx}$ ausgedrückt werden, wo $\sqrt{4gx}$ die Geschwindigkeit bezeichnet, die ein aus der Höhe x fallender Körper erreicht hat. Es ist bekannt, dafs die Newtonische Theorie dasselbe Resultat giebt, wenn $f^2 : \sqrt{2}$ die vena contracta bezeichnet.

Weil $v^2 = 2gx$, also $\frac{v^2}{2g} = x$, und $\frac{v^2}{4g} = \frac{x}{2}$, so kann man dieses Resultat also ausdrücken, dafs die Geschwindigkeiten des aus der Oeffnung laufenden Wassers

Digitized by Google

der Wasserhöhe zugehören. Doch ist es besser, die erstere Bezeichnung zu behalten, weil sie die merkwürdige Erscheinung des zusammengezogenen Strahls erklärt.

§. 6. Wir wollen nun die allgemeine Equation $2vdv = 2gdx$ (§. 4.) auf die Gefäfse anwenden, welche beständig voll erhalten werden, und auf diejenigen, welche auslaufen. Es sey $c =$ der Geschwindigkeit des aus der Oeffnung EF laufenden Wassers (Fig. V.), der Diameter $EF = m$, und der Durchmesser eines gewissen Durchschnitts $pm = z$, so ist die Geschwindigkeit

$$v = \frac{m^2 c}{z^2}, \text{ folglich } v^2 = \frac{m^4 c^2}{z^4}, \text{ also}$$

$$2vdv = d(v^2) = d\,\frac{m^4 c^2}{z^4} = m^4\, d\,\frac{c^2}{z^4}.$$

Die zwey erwähnten Fälle sind in dieser Equation enthalten. Bleibt das Gefäfs beständig voll, so ist die Geschwindigkeit des Ausflusses oder c unveränderlich; wenn aber das Gefäfs ausgeleert wird, so sind c und z veränderliche Gröfsen.

Ist im ersten Falle c unveränderlich, so ist $2vdv = m^4 c^2\, d\,\frac{1}{z^4} = -\frac{4 m^4 c^2 dz}{z^5} = 2gdx$, also giebt die Integration $\frac{m^4 c^2}{z^4} = 2gx + C$. Man findet die beständige Gröfse C, weil für $x = v$ der Durchschnitt $pm =$ der Weite des Gefäfses AD, oder $z = n$ wird. Also $C = \frac{m^4 c^2}{n^4}$, folglich $\frac{c^2}{2g}\left(\frac{m^4}{z^4} - \frac{m^4}{n^4}\right) = x$. Wenn nun

$x =$ der Wasserhöhe $AB = a$ wird, so ist auch $z = m$, also $a = \frac{c^2}{2g}\left(1 - \frac{m^4}{n^4}\right)$, folglich $c^2 = 2ga : \left(1 - \frac{m^4}{n^4}\right)$.

§. 7. Wenn das Gefäfs allmählig ausfliefst, so wird $2vdv = m^4\, d\,\frac{c^2}{z^4}$, oder (§. 6.)

$$m^4\left(\frac{2cdc}{z^4} - \frac{4c^2dz}{z^5}\right) = 2gdx.$$

Um das erste Glied der Equation zu integriren, mufs man einen gewissen Stand des Wassers, z. E. bey MQ betrachten, wo zu einer gegebenen Zeit das Wasser von A bis P gefallen ist; dann kann man von der Zeit die Geschwindigkeit c als gegeben ansehen, folglich läfst sich der Terminus $-\frac{4c^2dz}{z^5}$ integriren; das Integral ist $\frac{c^2}{z^4}$. Weil nun ein gewisser Wasserstand für eine gegebene Zeit betrachtet wird, so kann man in den ersten Terminus $\frac{2cdc}{z^4}$ das Element der Zeit oder dt hineinbringen.

Es ist aber $\frac{dx}{dt} = \frac{m^2c}{z^2}$, also $c = \frac{z^2dx}{m^2dt}$, folglich wird $\frac{2cdc}{z^4} = \frac{2dc}{m^2dt} \cdot \frac{dx}{z^2}$. Weil nun sowohl Zeit als Geschwindigkeit gegeben sind, so ist auch $\frac{dc}{dt}$ gegeben, folglich ist das Integral $= \frac{2dc}{m^2dt}\int\frac{dx}{z^2}$: es wird daher das ganze Integral $= \frac{2m^2dc}{dt}\int\frac{dx}{z^2} + \frac{m^4c}{z^4} = 2gx + C$. Die

Digitized by Google

des Gefäfses, so wird $n^4 : m^4$ eine grofse Zahl seyn; also $a^2 : a n^4 : m^4$, und $x : x n^4 : m^4$ werden $= 0$ seyn, und

$n^4 : (2m^4 - n^4) = -1$, also $dt = \frac{-n^2}{m^2} dx : \sqrt{2gx}$:

demnach ist $t = \frac{-2n^2}{m^2} \sqrt{\frac{x}{2g}} + C$. Wenn $x = a$, so ist $t = 0$, also $C = \frac{2n^2}{m^2} \sqrt{\frac{a}{2g}}$, und

$$t = \frac{n^2 \sqrt{2}}{m^2 \sqrt{g}} (\sqrt{a} - \sqrt{x}).$$

Die Zeit der ganzen Ausleerung des Gefäfses wird gefunden, wenn $n = c$, also $t = \frac{n^2}{m^2} \sqrt{\frac{2a}{g}}$.

Anmerkung. Die vorstehende VIte Abhandlung befindet sich weiter ausgeführt, und nebst Vergleichung der darin enthaltenen Theorie mit denen des Newton, Euler, Maclaurin und Bernoulli in dem Leipziger Magazine für reine und angewandte Mathematik, Jahrg. 1787. St. IV. p. 385. seqq.

Digitized by Google

Verzeichnifs der Schriften des Verfassers.

1. Die genaue Harmonie des Sinnlichen mit dem Vernünftigen in der Natur des Menschen. Siehe Neue Erweiterungen der Erkenntnifs und des Vergnügens. Leipzig 1753. Eilftes und dreyzehntes Stück.
2. Nachricht von der Schuchischen Schauspielergesellschaft in Berlin. Ebendaselbst, im 21 Stück.
3. Moralische Beobachtungen über die Verläumdung, die Falschheit und den Argwohn. Ebendas. 29 Stück.
4. Gedanken über den Werth und Nutzen der Lustspiele. Daselbst, 34 Stück.
5. Traité des Termomètres, où it est parlé d'une nouvelle mesure de la chaleur. La Haye 1759.
6. Lettre snr la Comète. Bibliothèque des sciences, Tome second. 1759.
7. Dissertatio de umbra lunari, in Actis Eruditorum ann. 1760.
8. Meetkundige Verhandeling etc. das ist: Geometrische Abhandlung über einige Eigenschaften der Polygone, im 5ten Theil der Abhandlung der Harlemschen Gesellschaft. 1760.
9. Werkkundig Voorstel etc. oder: über die Bewegung zweyer Körper, die an einen Faden gebunden sind. Ebendaselbst.
10. Problemata de centro aequilibrii potentiarum vecti adplicatarum et de conflictu corporum imperfecte elasticorum, theoriae virium vivarum repugnante. In actis Eruditorum ann. 1762.
11. Verhandeling over de wyze etc. oder über die Brüche, deren Zähler und Nenner unter gewissen Bedingungen verschwinden. Harlemsche Gesellschaft des Jahrs 1762.

Digitized by Google

12. Van de Beweeging etc., oder über die Bewegung eines Körpers, nachdem derselbe in den Anziehungspunkt gekommen ist. Ebendaselbst.

13. De Compressione et restitutione, una cum accuratiori virium vivarum disquisitione. In actis Eruditorum ann. 1763.

14. Navorschingen raakende etc., oder über die schiefen Potenzen des Hebels. Harlemsche Gesellsch, Jahr 1763.

15. Eenige Vraagstukken etc., oder über den Stofs der unvollkommen elastischen Körper. Ebendaselbst.

16. Oratio dicta publice de Ingenio Mathematico. Trajecti 1764.

17. Proeve eener Theorie etc., Theorie der Wassermühlen. Harlemsche Gesells. 1765.

18. Oratio publice dicta de Matheseos studio cum solida Educatione conjungendo. Trajecti. 1765.

19. Le bel Esprit. Comédie en trois actes. Utrecht 1766.

20. Dissertation sur la Vis d'Archimède, qui a remporté le prix de l'Academie des sciences de Berlin. Berlin 1766.

21. Elementa Arithmetices, Geometriae et Trigonometriae. Trajecti. 1766.

22. Beschouwingen etc., oder über den Stofs der flüssigen Körper. Harl. Gesells. 1767.

23. Elementa Analysis Finitorum. 1768.

24. Verhandeling over etc., oder über den Widerstand der Luft. Harlemsche Gesells. 1768.

25. Elementa Analysis Infinitorum. 1768.

26. Elementa universae Mechanices. 1768.

27. Elementa Hydrostatices et Hydraulices. 1769.

28. Elementa Optices etc. 1770.

29. Verhandeling over de Parallaxis der Zon. Harl. Gesells. 1771.

Digitized by Google

30. Elementorum Astronomiae Pars prior. 1772.

31. Dissertation sur les moïens de donner la plus grande perfection aux lunettes, dont les objectifs sont composés de deux verres, qui a remporté le prix, de l'Académie des sciences de Berlin. à Berlin 1772.

32. Elementorum Astronomiae Pars altera, una cum Arte nautica. 1773.

33. Onderzocking omtrent de Figuur der Aarde. Zeeländ. Gesells. 1773.

34. Dissertatio de sensu morali, cui praemium adduxerunt Legati Stolpiani administratores. Leidae 1774.

35. Verhandeling over de achromatische Teleskopen. Rotterd. Gesells. 1774.

36. Elementa Architecturae navalis, Pyrotechnices et Acustices. 1775.

37. Onderzoek of de etc., oder über die Fehler, welche aus den verschiedenen Hypothesen der Figur der Erde in der Astronomie und Schiffahrt entstehn können. Zeländ. Gesells. 1775.

38. Institutiones Astronomiae, Gnomonices etc. Trajecti. 1778.

39. Dissertations physiques et mathématiques. Utrecht 1778.

40. Dissertations sur la Théorie des Comètes qui ont concourués au prix proposé par l'Académie des sciences de Berlin, en l'annee 1777. Utrecht 1780.

41. Untersuchungen über die Bahn des Uranus. Leipziger Magazin 2tes Stück 1782.

42. Analytische Auflösung der Aufgabe, die Bahn eines Planeten aus drey gegebenen heliocentrischen Oertern zu bestimmen. Ebendaselbst 2tes Stück. 1783.

Digitized by Google

43. Analytische Untersuchung über die Bestimmung der elliptischen Bahn aus vier gegebenen heliocentrischen Oertern, und über den Uranus. Daselbst, 1stes Stück. 1784.

44. Vertoog etc., oder über den Weg des Uranus etc. Letter-Oeffeningen. No. 10. Jahr 1782 und 83.

45. Dissertationes de uniformitate motus terrae, auctoribus I. F. Hennert et Frisio, praemiis ornatae. Petropoli 1784.

46. Ueber die Bahn des neuen Planeten. Astron. Jahrbuch 1785.

47. Ueber die parabolische Laufbahn der Cometen. Daselbst 1786.

48. Fortgesetzte Bemerkungen über den Uranus. Daselbst.

49. Commentatio de altitudinum mensuratione ope Barometri, a Societate Scientiarum Göttingensi praemio ornata. Trajecti. 1786.

50. Aus gleichen Höhen zweyer Sterne die Polhöhe zu finden. Astron. Jahrbuch 1787.

51. Ueber die mittlere Strahlenbrechung. Ebendaselbst.

52. Ueber die Menge des aus Gefäfsen laufenden Wassers. Leipz. Magazin 1787.

53. Ueber die Bewegung des Wassers aus horizontalen Röhren. Ebendaselbst.

54. Versuch einer Theorie der Bewegung des Wassers. Ebendaselbst.

55. Oratio de Physionomia dicta publice. Traj. 1784.

56. Onderzoek etc., oder Betrachtungen über die Zurückkunft des Cometen von 1680. Letter-Oeffening. No. 4. 1789.

57. Versuch einer Theorie über die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in Flüssen. Archiv der Mathematik 1795.

Digitized by Google

58. Aus Polhöhe und zweyer Sterne Rectascension etc. die wahre Zeit zu finden. Astron. Jahrbuch 1796.

59. Dissertations sur la Fortification permanente, la Fortificaion de Compagne etc. Utrecht 1795.

60. Ueber die astronomische Strahlenbrechung. Archiv der Mathematik 1798.

61. Ueber die Strahlenbrechung mit Rücksicht auf Thermometer und Barometer. Ebendaselbst.

62. Ueber die Ausziehung der Wurzeln aus binomischen Gröfsen. Ebendaselbst 9tes Stück.

63. Ueber die geographischen Messungen. Astron. Jahrbuch 1802.

64. Die Breite und wahre Zeit aus Höhenmessungen zu finden. Ebend. 1803.

65. Aus der gröfsten Mittelpunktsgleichung die Excentricität eines Planeten zu finden. Ebend. 1801.

66. Uitgeleezene Verhandelingen over de Wysgeerte en fraaje Letteren, getrokken uit de Werken der koninglyke Akademie der Weetenschappen te Berlyn. Sechs Theile, Utrecht 1780—95. — Diese Sammlung enthält Uebersetzungen philosophischer Abhandlungen der Berlinischen Academie der Wissenschaften von Studenten unter der Aufsicht des Verfassers herausgegeben. Der Verfasser hat einige eigne Abhandlungen beygefügt, nämlich im ersten Theil verschiedene Abhandlungen über den Spinozismus, desselben Vergleichung mit Malebranche und Berkeley. (Der Verfasser hält diese Philosophen für Idealisten.) — Ueber den Ursprung des Vergnügens; die Erklärung von Cartesius über das Vergnügen kann mit Pouily, Sulzer, Home etc. übereinstimmen. — Im zweyten Theil, über die Freyheit der Seele. — Im dritten Theil, über gegenwärtigen Atheismus. — Im vierten Theil, über das moralische Gefühl.

Digitized by Google

67. Grondbeginselen der zedelyken Weetenschappen, door Beattie. Utrecht 1796. — Diese Uebersetzung der Principles of moral sciences by Beattie hat der Verfasser empfohlen und mit Anmerkungen, meist litterarischen Inhalts, versehen, auch kurze Abhandlungen, über das Studium der Phychologie, über Sprache etc. beygefügt.

Verbesserungen.

Seite 14 Zeile 7 statt Geschwindheit lifs Geschwindigkeit
— 32 — 13 — 31 077 lifs 4,077
— 36 — 13 und 14 mufs die Reihe so heifsen:

$$Aa + Bbx + Ccx^2 + Dex^3 + Efx^4$$

Digitized by Google

Druckfehler in der Abhandlung, die Excentricität betreffend, im Jahrbuch von 1804. pag. 218.

Seite 219 Zeile 5 lifs: wird $m = \sqrt{((e^2-1)x^2 + 2x - 1)}$
$+ \text{Arc. cos.} \frac{(1-e^2)x-1}{e}$

— 219 — 13 lifs: 6,7 für den Coefficienten 5,6

— 220 — 11 lifs: $(1-e^2)^{\frac{3}{2}}$ für $(1-e)^{\frac{3}{2}}$

— — — 3 v. unt. lifs: $-4 \sin.2v \overline{\sin.v}^2$ für $-4 \sin.2v \overline{\sin.v}^3$

— — — 9 v. unt. lifs: $-\frac{9e^4}{16.4}$ für $+$

— 221 — 1 lifs: $-\frac{571e^5}{(16)^3}$ für $\cdot \frac{171e^5}{(16)3}$

— — — 4 und 5 lifs: sin. $5v$ und sin. $6v$ für sin. 58 u. sin. 68

— — — 12 lifs: $\frac{67530e^7}{(16)^4}$ für $\frac{6798e^7}{(16).4}$

— — — 19 lifs: $\frac{1987.C^7}{(16)^5 8.15}$ für $\frac{550699.C^7}{(18)^5 8.45.}$

Digitized by Google

Digitized by Google

Nachträge zu den Verbesserungen.

Seite 18 Zeile 7 statt $D^2 dt^2$ lifs $D^2 r$

— 29 — 13 statt $a=3$ lifs $a=-3$

— 38 u. 39 überall statt tang. $2n-1$ lifs tang. $2n+1$

— 42 — 11 statt dS lifs $\frac{dS}{dx}$

— 43 — 16 statt d^3x lifs d^3S

— ib. — 18 statt $x^{n+3}d^3$ lifs $x^{n+3}ddS$

— ib. — letzte statt $6x^{n+3}$ lifs Gx^{n+3}

— 46 — 6 statt $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$ lifs $\frac{x}{2(1+x^2)}$

— ib. — 11 u. 12 lifs $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}=0{,}3926991+0{,}5$

$=0{,}8926991$, also $\frac{\pi}{8}=1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+$ etc. $-\frac{1}{8}$

— 47 mufs von der dritten Zeile an so heifsen:

$\frac{dS}{dx}=-\frac{\log.}{2}(1+x^2)+C$. Wenn x verschwindet, so wird $\frac{dS}{dx}=1-\frac{\log.}{2}(1+x^2)$. Das zweyte Integral ist das folgende: $S=x-\frac{1}{2}\int dx \log.(1+x^2)$. Es ist aber $\int dx \log.(1+x^2)=x\log.(1+x^2)-\int\frac{2x^2dx}{1+x^2}=x\log.(1+x^2)-2x+2$ Arc. tang. x; endlich $S=2x-\frac{x}{2}\log.(1+x^2)-$ Arc. tang. x.

Für $x=1$ wird die Summe der Series $1-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}-\frac{1}{6.7}+$ tc. $=2-\frac{\log.2}{2}-\frac{\pi}{4}=0{,}868028$

— 56 Zeile 4 v. u. statt sin. R lifs sin. H

— 68 — 2 statt $n=4$ lifs $x=a$

— ib. — 17 statt -1 lifs $-r$

— 70 — 8 statt $n=c$ lifs $x=0$

NB. Zu den Büchern sind auch noch unter No. 59 b. Aphorismi philosophici ad vsum scholarum suarum. Traj. 1778. nachzutragen.

Digitized by Google

Zusatz zu §. 8. S. 8.

Wollte man e aus e^2 ableiten, so muſs die Equation $e = (Q - Ae^2) : 2 \sin. V$ gebraucht werden. Es ist nämlich $e^2 = (Q - 2e \sin. V) : A$

log. e	=	8, 9683876
log. sin. V	=	9, 9987942
log. 2	=	0, 3010300
log. $2e \sin. V$	=	9, 2687118
also $- 2e \sin. V$	=	0, 1856572
Q	=	0, 1863526
$Q - 2e \sin. V$	=	0, 0006954
Dessen log.	=	6, 8422547
log. A	=	8, 9037339
log. e^2	=	7, 9385008
log. e	=	8, 9692504
also e	=	0, 0931645. Der erst gefundene
Werth von e war	=	0, 0930862
das Mittel	=	0, 0931253
Nach la Lande	=	0, 0930877
Fehler	=	0, 0000376

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building

FORM 410

Digitized by Google